Épreuve de mathématiques CRPE 2017 groupe 1.

Lien vers le sujet seul : pdf.

I Première partie (13 points).

Présentation du problème.

1. (a) Déterminons AC et BC.

Le coefficient de réduction qui permet de passer de la distance réelle (exprimé en mètres) à la distance à l'échelle (exprimée en mètres) est le coefficient de proportionnalité qui appliqué à la première ligne du tableau donne la seconde :

Distance réelle	204 400	210 000	145 600
Distance sur la carte	0,073	$\frac{15}{2} \cdot 10^{-2} = 0{,}07$	$\frac{26}{5} \cdot 10^{-2} = 0{,}052$
Segment	AB	AC	BC

Autrement dit le coefficient de proportionnalité est

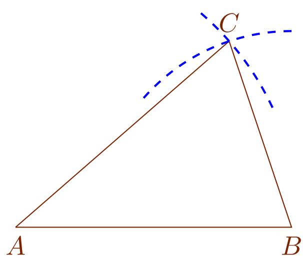
$$c = \frac{0{,}073}{204400} = \frac{1}{28} \cdot 10^{-5}$$

ce qui permet de compléter le tableau de proportionnalité.

Nous avons établi que $AC = 7{,}5$ cm et $BC = 5{,}2$ cm.

(b) construisons le triangle ABC.

Nous connaissons les trois longueurs du triangle. Sa construction à la règle et au compas est donc aisée. Ici à l'échelle un demi.



(c) Déterminons l'échelle utilisée.

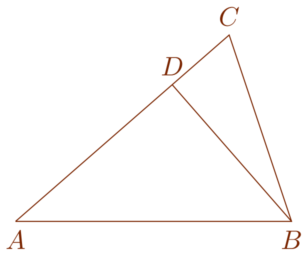
L'échelle est le quotient de la longueur réduite sur la longueur réelle exprimée sous forme d'une fraction avec le nombre 1 au numérateur.

$$\frac{0{,}073}{204400} = \frac{1}{28} \cdot 10^{-5} = \frac{1}{2\,800\,000}$$

L'échelle est $\dfrac{1}{2\,800\,000}$.

2. (a) Dessinons le point D.

Pour minimiser la distance de B à (AC) il faut projeter orthogonalement B sur (AC).



La droite (BD) est la hauteur de ABC issue de B.

(b) Calculons AD.

L'égalité donnée est successivement équivalente à

$$BC^2 - (AB^2 + AC^2) = AB^2 + AC^2 - 2 \times AC \times AD - (AB^2 + AC^2)$$
$$BC^2 - AB^2 - AC^2 = -2AC \times AD$$

AC étant non nul

$$\frac{BC^2 - AB^2 - AC^2}{-2AC} = AD$$

En utlisant les données numériques de l'énoncé (en centimètres)

$$\frac{5{,}2^2 - 7{,}3^2 - 7{,}5^2}{-2 \times 7{,}5} = AD$$
$$5{,}5 = AD$$

$$AD = 5{,}5 \text{ cm.}$$

(c) Calculons CD.

A, D et C sont alignés dans cet ordre, donc $AD + DC = AC$.
En tenant compte des données numériques déjà obtenues : $5{,}5 + DC = 7{,}5$.
Cette dernière égalité est successivement équivalente à

$$\begin{aligned} 5{,}5 + DC - 5{,}5 &= 7{,}5 - 5{,}5 \\ DC &= 2 \end{aligned}$$

$$DC = 2 \text{ cm.}$$

Calculons BD.

Puisque (BD) est la hauteur de ABC issue de B, ABD est rectangle en D. Donc, d'après le théorème de Pythagore,

$$BD^2 + AD^2 = AB^2$$

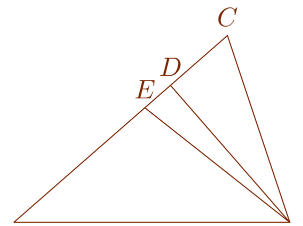
ce qui est successivement équivalent à

$$\begin{aligned} BD^2 + 5{,}5^2 &= 7{,}3^2 \\ BD^2 + 5{,}5^2 - 5{,}5^2 &= 7{,}3^2 - 5{,}5^2 \\ BD^2 &= 23{,}04 \end{aligned}$$

BD désignant une longueur, c'est un nombre positif et donc :

$$\begin{aligned} BD &= \sqrt{23{,}04} \\ BD &= 4{,}8 \end{aligned}$$

$$BD = 4{,}8 \text{ cm.}$$



3.

(a) Déterminons la mesure de $\widehat{DBE}$.

DBE est rectangle en D donc

$$\frac{ED}{BD} = \tan(\widehat{DBE})$$

D'où

$$\begin{aligned}\widehat{DBE} &= \arctan\left(\frac{0{,}9}{4{,}8}\right)\\ &\approx 10{,}619\end{aligned}$$

$$\boxed{\widehat{DBE} \approx 10{,}62\ °.}$$

(b) Calculons BE.

Puisque DBE est rectangle en D

$$\frac{DB}{BE} = \cos\left(\widehat{DBE}\right)$$

et donc

$$\begin{aligned}\frac{4{,}8}{BE} &= \cos(1\widehat{DBE})\\ \frac{4{,}8}{BE}\times BE &= \cos(\widehat{DBE})\times BE\\ 4{,}8 &= BE \times \cos(\widehat{DBE})\\ \frac{4{,}8}{\cos(\widehat{DBE})} &= \frac{BE \times \cos(\widehat{DBE})}{\cos(\widehat{DBE})}\\ \frac{4{,}8}{\cos(\widehat{DBE})} &= BE\end{aligned}$$

Enfin

$$BE \approx 4{,}88 \text{ cm.}$$

(c) Déterminons la longueur l de la portion d'autoroute.

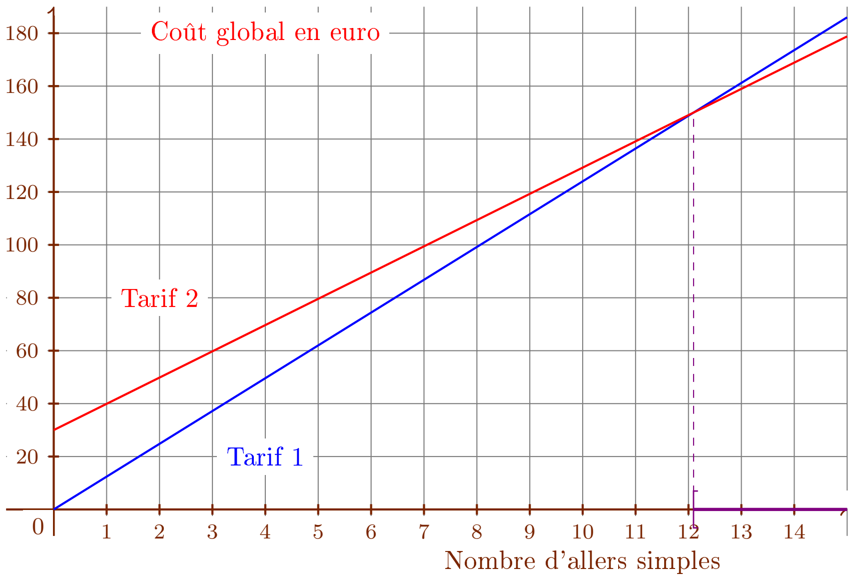
Puisque l'échelle est de $\frac{1}{2\,800\,000}$, l exprimée en mètres est

$$\begin{aligned} l &= 2\,800\,000 \times \frac{BE}{100} \\ &\approx 2\,800\,000 \times \frac{4{,}88}{100} \end{aligned}$$

et donc en kilomètres

$$l \approx 136{,}6 \text{ km.}$$

4. (a)



Le tarif 2 devient plus avantageux à partir de 12 allers simples.

(b) Déterminons $f(x)$.

Par proportionnalité, chaque aller simple coutant 12,40 €,

$$f(x) = 12{,}40x.$$

(c) Déterminons $g(x)$.

En reprenant le descriptif du tarif 2 :

$$g(x) = 30 + \left(1 - \frac{20}{100}\right) \times 12{,}40$$

Donc

$$g(x) = 9{,}92x + 30.$$

(d) Résolvons $g(x) \leq f(x)$ dans $\mathbb{N}$.

L'inégalité équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
9{,}92x + 30 &\leq 12{,}4x \\
9{,}92x + 30 - 12{,}4x &\leq 12{,}4x - 12{,}4 \\
(9{,}92 - 12{,}4)x + 30 &\leq 0 \\
-2{,}48x + 30 &\leq 0 \\
-2{,}48x + 30 - 30 &\leq 0 - 30 \\
-2{,}48x &\leq -30
\end{aligned}$$

puisque $-2{,}48 < 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{-2{,}48x}{-2{,}48} &\geq \frac{-30}{-2{,}48} \\
x &\geq \frac{375}{31}
\end{aligned}$$

Or $\frac{375}{31} \approx 12{,}09677$, donc

Le tarif 2 devient avantageux à partir de 13 allers simples.

5. (a) Calculons D_r.

Le conducteur étant fatigué il met deux secondes à réagir *i.e.* $\frac{2}{60\times 60}$ h. Et puisqu'il roule à 120 km/h :

$$\begin{aligned} D_r &= 120 \times \frac{2}{60 \times 60} \\ &= \frac{1}{15} \end{aligned}$$

$$\boxed{D_r \approx 66{,}7 \text{ m.}}$$

(b) Déterminons si la collision peut être évitée.

Elle sera évitée si $D_a \leq 150$. Or

$$\begin{aligned} D_a &= D_r + D_f \\ &= \frac{100}{15} + D_f \end{aligned}$$

donc il faut que

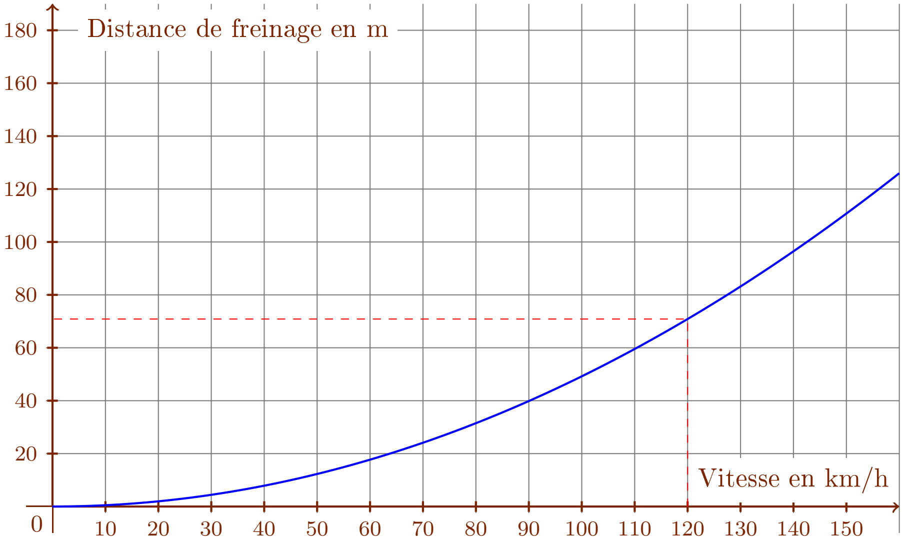
$$\frac{100}{15} + D_f \leq 150$$

Ce qui équivaut encore à

$$\begin{aligned} \frac{100}{15} + D_f - \frac{100}{15} &\leq 150 - \frac{100}{15} \\ D_f &\leq 150 - \frac{100}{15} \\ &\leq \frac{280}{3} \\ &\approx 93{,}3 \end{aligned}$$

Par lecture graphique nous obtenons qu'en roulant à 120 km/h,

$$D_f \approx 72 \text{ m,}$$



Distance de freinage en mètre, en fonction de la vitesse en km/h.

> La collision sera évitée puisque le véhicule s'arrêtera à une vingtaine de mètres du cerf.

(c) En reprenant la formule donnée par l'énoncé et puisque la route est sèche

> En B3 :
>
> $= A3 * A3/(254 * 0{,}8)$.

II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

1. Complétons le tableau en sommant pour obtenir les bons totaux et en sachant que 12 527 personnes au total ont été interrogées.

	De 15 à 25 ans	De 26 à 44 ans	De 45 à 60 ans	Plus de 60 ans	Total
Pas du tout	22	82	415	147	666
Un fois	682	3 794	1 243	589	6 308
Deux fois	413	634	552	138	1 737
Trois fois	174	95	384	1 254	1 907
Quatre fois ou plus	251	418	923	317	1 909
Total	1 542	5 023	3 517	2 445	12 527

2. (a) Notons E_1 l'événement « la personne choisie est allée exactement deux fois au restaurant ».

Calculons $P(E_1)$.

Le choix des numéros étant équiprobable, l'univers comportant 12 527 issues, E_1 étant réalisé par 1 737 issues

$$P(E_1) = \frac{1\,737}{12\,527}.$$

(b) Notons E_2 l'événement « la personne choisie a moins de 45 ans ».

Calculons $P(E_2)$.

Le choix des numéros étant équiprobable, l'univers comportant 12 527 issues, E_2 étant réalisé par $1\,545 + 5\,023 = 6\,565$ issues

$$P(E_2) = \frac{6\,565}{12\,527}.$$

(c) Notons E_3 l'événement « la personne choisie a plus de 60 ans et est allée au moins trois fois au restaurant ».

Calculons $P(E_3)$.

Le choix des numéros étant équiprobable, l'univers comportant 12 527 issues, E_3 étant réalisé par $1\,254 + 317 = 1\,571$ issues

$$P(E_3) = \frac{1\,571}{12\,527}.$$

Exercice 2.

1. $7 < 10$ donc le résultat affiché est $5 \times 7 + 3 = 38$.

   Si l'on entre 7 le programme retourne 38.

2. $12{,}7 > 10$ donc le résultat affiché est $2 \times 12{,}7 - 7 = 18{,}4$.

   Si l'on entre 12,7 le programme retourne 18,4.

3. $-6 < 10$ donc le résultat affiché est $5 \times (-6) + 3 = -27$.

   Si l'on entre 6 le programme retourne -27.

Exercice 3.

1. $1 + 1 + 7 = 9$ et 9 est divisible par 3, donc 117 est divisible par 3.

   L' affirmation 1 est fausse.

2. (a)

$$\begin{aligned}(n+2)^2 - (n-2)^2 &= [(n+2) - (n-2)] \times [(n+2) + (n-2)] \\ &= 4[2n] \\ &= 8n\end{aligned}$$

   L'affirmation 2.(a) est vraie.

   (b) Pour $n = 1$, $(1+2)^2 - (n-2)^2 = 8$ n'est pas un multiple de 32.

   L'affirmation 2.(b) est fausse.

3. Par une démarche d'analyse synthèse nous obtenons la forme d'une réponse : $2 \times 3 \times n$ avec n qui n'est divisible ni par 2 ni par 3.

   $30 = 2 \times 3 \times 5$ convient.

L'affirmation 3 est vraie.

4. Même si 6 est solution, elle ne peut être unique puisque 7 est une solution évidente.

L'affirmation 4 est fausse.

5. Déterminons l'aire du rectangle.

Notons l et L respectivement les largeur et longueur du rectangle.
Le coefficient multiplicateur correspondant à une diminution de 20 % est

$$\begin{aligned} CM_1 &= 1 + \frac{t_1}{100} \\ &= 1 + \frac{-20}{100} \\ &= 0{,}8 \end{aligned}$$

De même le coefficient multiplicateur correspondant à une diminution de 19 % est

$$CM_2 = 0{,}9.$$

L'aire du nouveau rectangle est donc

$$(0{,}8 \times l) \times (0{,}9 \times L) = 0{,}72 \times l \times L$$

Ainsi l'aire du rectangle a été multipliée par 0,72. Le taux d'évolution, en pourcentage, correspondant est

$$\begin{aligned} t &= 100 \times (CM - 1) \\ &= 100 \times (0{,}72 - 1) \\ &= 28 \end{aligned}$$

L'affirmation 5 est vraie.

6. Le périmètre du rectangle initial est

$$p_1 = 2 \times (6 + 9) = 30.$$

La nouvelle largeur est

$$l_2 = \left(1 + \frac{-20}{100}\right) \times 6 = 0{,}8 \times 6 = 4{,}8.$$

La nouvelle longueur est

$$L_2 = \left(1 + \frac{-10}{100}\right) \times 9 = 0{,}9 \times 9 = 8{,}1.$$

Le périmètre du nouveau rectangle est donc

$$p_2 = 2 \times (4{,}8 + 8{,}1) = 25{,}8.$$

Le taux d'évolution, en pourcentage, entre les deux périmètres est donc de

$$\begin{aligned} t &= \frac{V_A - V_D}{V_D} \times 100 \\ &= \frac{25{,}8 - 30}{30} \times 100 \\ &= -14 \end{aligned}$$

Le périmètre a donc diminué de 14 %.

L'affirmation 6 est fausse.