Épreuve de mathématiques CRPE 2017 groupe 1.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Durée : 4 heures.
Épreuve notée sur 40.

I Première partie (13 points).

Présentation du problème.

Une entreprise de BTP est mandatée pour étudier la faisabilité de la réalisation d'une portion d'autoroute et d'un nouvel échangeur dans la région de Bordeaux / Brive-la-Gaillarde / Montauban.

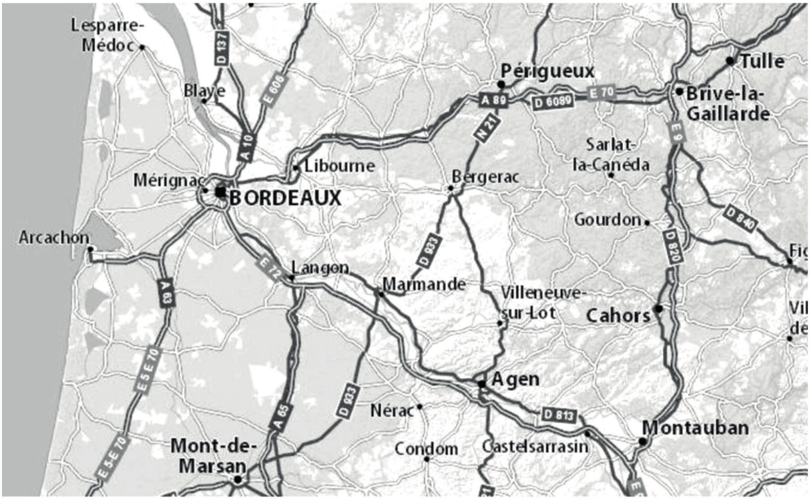


Figure 1 : Source = http://www.viamichelin.fr/

1. **Représentation géométrique.**
   À vol d'oiseau, il y a 204,4 km entre Brive-la-Gaillarde et Bordeaux, 210 km entre Bordeaux et Montauban et 145,6 km entre Montauban et Brive-la-Gaillarde.
   On admet que cette situation géographique est modélisée par un triangle ABC, construit à une certaine échelle, dans lequel A représente Bordeaux, B représente Brive-la-Gaillarde et C représente Montauban.
   Dans ce triangle, la longueur AB est 7,3 cm.

(a) Montrer que la longueur AC est 7,5 cm et que la longueur BC est 5,2 cm.

Déterminons AC et BC.

Le coefficient de réduction qui permet de passer de la distance réelle (exprimé en mètres) à la distance à l'échelle (exprimée en mètres) est le coefficient de proportionnalité qui appliqué à la première ligne du tableau donne la seconde :

Distance réelle	204 400	210 000	145 600
Distance sur la carte	0,073	$\frac{15}{2} \cdot 10^{-2} = 0{,}07$	$\frac{26}{5} \cdot 10^{-2} = 0{,}052$
Segment	AB	AC	BC

Autrement dit le coefficient de proportionnalité est

$$c = \frac{0{,}073}{204400} = \frac{1}{28} \cdot 10^{-5}$$

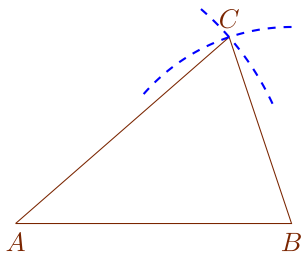
ce qui permet de compléter le tableau de proportionnalité.

Nous avons établi que $AC = 7{,}5$ cm et $BC = 5{,}2$ cm.

(b) Construire le triangle ABC.

construisons le triangle ABC.

Nous connaissons les trois longueurs du triangle. Sa construction à la règle et au compas est donc aisée. Ici à l'échelle un demi.



(c) Déterminer l'échelle utilisée pour modéliser la situation.

Déterminons l'échelle utilisée.

L'échelle est le quotient de la longueur réduite sur la longueur réelle exprimée sous forme d'une fraction avec le nombre 1 au numérateur.

$$\frac{0{,}073}{204400} = \frac{1}{28} \cdot 10^{-5} = \frac{1}{2\,800\,000}$$

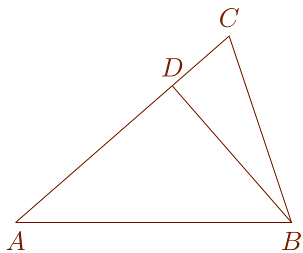
L'échelle est $\dfrac{1}{2\,800\,000}$.

2. **Étude de faisabilité.**
Dans le cadre d'un projet d'extension, la société d'exploitation mandate une entreprise de BTP pour étudier la construction d'une portion d'autoroute reliant Brive-la-Gaillarde et l'autoroute entre Bordeaux et Montauban. On cherche à construire la portion d'autoroute la plus courte possible.
Sur la figure construite précédemment, on note D le point du segment $[AC]$ tel que la distance BD soit la plus courte possible. Le point D représente l'emplacement de l'échangeur à construire.

(a) Placer le point D sur la figure et indiquer ce que représente la droite (BD) dans le triangle ABC.

Dessinons le point D.

Pour minimiser la distance de B à (AC) il faut projeter orthogonalement B sur (AC).



La droite (BD) est la hauteur de ABC issue de B.

(b) Les formules trigonométriques et un théorème appelé théorème d'Al Kashi permettent d'établir l'égalité (admise) :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AC \times AD.$$

En utilisant l'égalité ci-dessus, montrer que $AD = 5{,}5$ cm.

Calculons AD.

L'égalité donnée est successivement équivalente à

$$BC^2-(AB^2+AC^2) = AB^2+AC^2-2\times AC\times AD-(AB^2+AC^2)$$
$$BC^2-AB^2-AC^2 = -2AC\times AD$$

AC étant non nul

$$\frac{BC^2-AB^2-AC^2}{-2AC} = AD$$

En utlisant les données numériques de l'énoncé (en centimètres)

$$\frac{5{,}2^2-7{,}3^2-7{,}5^2}{-2\times 7{,}5} = AD$$
$$5{,}5 = AD$$

$$\boxed{AD = 5{,}5 \text{ cm.}}$$

(c) En déduire les longueurs CD et BD.

Calculons CD.

A, D et C sont alignés dans cet ordre, donc $AD+DC = AC$.
En tenant compte des données numériques déjà obtenues : $5{,}5+DC = 7{,}5$.
Cette dernière égalité est successivement équivalente à

$$5{,}5+DC-5{,}5 = 7{,}5-5{,}5$$
$$DC = 2$$

$$\boxed{DC = 2 \text{ cm.}}$$

Calculons BD.

Puisque (BD) est la hauteur de ABC issue de B, ABD est rectangle en D. Donc, d'après le théorème de Pythagore,

$$BD^2+AD^2 = AB^2$$

ce qui est successivement équivalent à

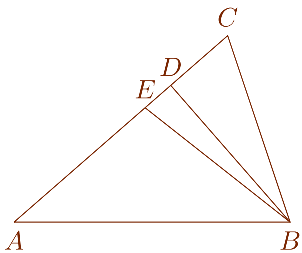
$$BD^2 + 5{,}5^2 = 7{,}3^2$$
$$BD^2 + 5{,}5^2 - 5{,}5^2 = 7{,}3^2 - 5{,}5^2$$
$$BD^2 = 23{,}04$$

BD désignant une longueur, c'est un nombre positif et donc :

$$BD = \sqrt{23{,}04}$$
$$BD = 4{,}8$$

$$\boxed{BD = 4{,}8 \text{ cm.}}$$

3. **Validation du projet.**
Il s'avère que l'échangeur ne peut être placé à cet endroit car il serait situé dans une zone protégée.
Sur la figure construite précédemment, E désignera l'emplacement définitivement choisi pour l'échangeur et donc $[BE]$ la portion d'autoroute à réaliser.
On appelle E le point du segment $[AD]$ tel que $[ED]$ mesure 0,9 cm



(a) Déterminer la mesure en degré, arrondie au centième de degré, de l'angle $\widehat{DBE}$.

Déterminons la mesure de $\widehat{DBE}$.

DBE est rectangle en D donc

$$\frac{ED}{BD} = \tan(\widehat{DBE})$$

D'où

$$\widehat{DBE} = \arctan\left(\frac{0{,}9}{4{,}8}\right)$$
$$\approx 10{,}619$$

$$\boxed{\widehat{DBE} \approx 10{,}62\ °.}$$

(b) Calculer la longueur BE, arrondie au centième de centimètre.

Calculons BE.

Puisque DBE est rectangle en D

$$\frac{DB}{BE} = \cos\left(\widehat{DBE}\right)$$

et donc

$$\begin{aligned}
\frac{4{,}8}{BE} &= \cos(1\widehat{DBE}) \\
\frac{4{,}8}{BE}\times BE &= \cos(\widehat{DBE})\times BE \\
4{,}8 &= BE \times \cos(\widehat{DBE}) \\
\frac{4{,}8}{\cos(\widehat{DBE})} &= \frac{BE \times \cos(\widehat{DBE})}{\cos(\widehat{DBE})} \\
\frac{4{,}8}{\cos(\widehat{DBE})} &= BE
\end{aligned}$$

Enfin

$$\boxed{BE \approx 4{,}88 \text{ cm.}}$$

(c) En déduire la longueur, en kilomètre, arrondie au dixième de kilomètre près de la portion d'autoroute qui sera réalisée.

Déterminons la longueur l de la portion d'autoroute.

Puisque l'échelle est de $\frac{1}{2\,800\,000}$, l exprimée en mètres est

$$\begin{aligned} l &= 2\,800\,000 \times \frac{BE}{100} \\ &\approx 2\,800\,000 \times \frac{4{,}88}{100} \end{aligned}$$

et donc en kilomètres

$$\boxed{l \approx 136{,}6 \text{ km.}}$$

4. **Tarification.**
Après validation, le projet a été réalisé. La société d'exploitation des autoroutes propose des badges à ses usagers.
Mme Dupuis, enseignante à Brive, emprunte cette nouvelle portion d'autoroute chaque jour, matin et soir. Elle hésite entre les deux propositions suivantes :

Tarif 1	Tarif 2
Sans badge, un aller simple coûte 12,40 €.	Un badge coûte 30 € par an et donne lieu a une réduction de 20 % par aller simple.

(a) Le graphique ci-dessous représente le coût global pour chaque tarif en fonction du nombre d'allers simples effectués.

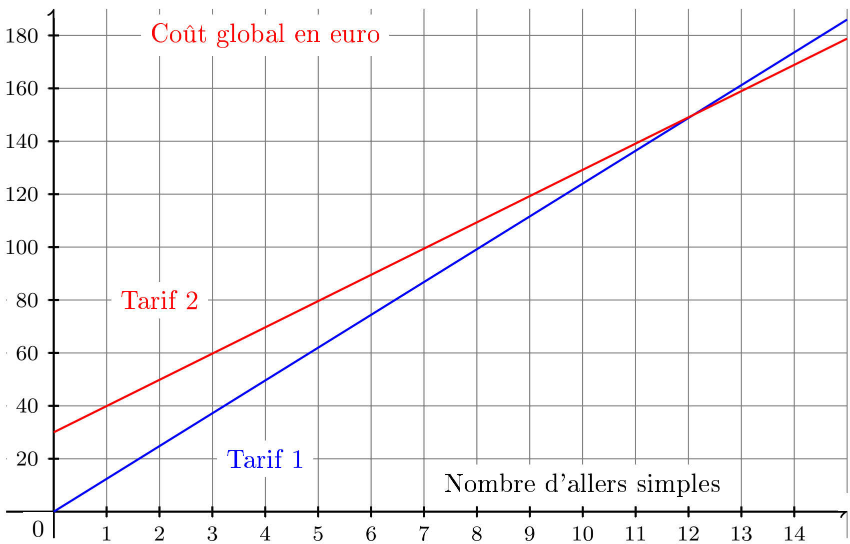
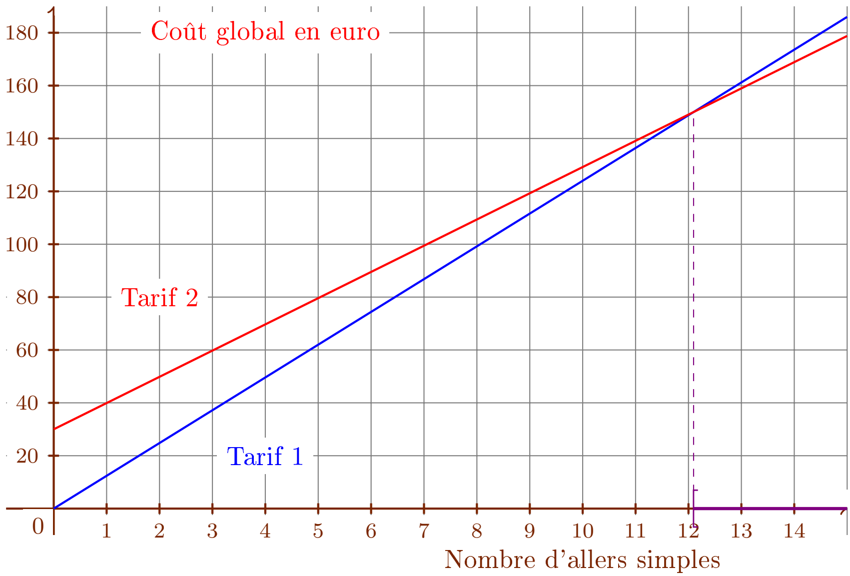


Figure 1 : Coût global en euros en fonction du nombre d'allers simples.

Déterminer graphiquement à partir de combien d'allers simples le tarif 2 devient le plus avantageux.



Le tarif 2 devient plus avantageux à partir de 12 allers simples.

(b) Exprimer en fonction du nombre d'allers simples x le coût global $f(x)$, en euro, selon le tarif 1.

Déterminons $f(x)$.

Par proportionnalité, chaque aller simple coutant 12,40 €,

$$f(x) = 12{,}40x.$$

(c) Exprimer en fonction du nombre d'allers simples x le coût global $g(x)$, en euro, selon le tarif 2.

Déterminons $g(x)$.

En reprenant le descriptif du tarif 2 :

$$g(x) = 30 + \left(1 - \frac{20}{100}\right) \times 12{,}40$$

Donc

$$\boxed{g(x) = 9{,}92x + 30.}$$

(d) Retrouver par le calcul à partir de combien d'allers simples le tarif 2 devient le plus avantageux.

Résolvons $g(x) \leq f(x)$ dans $\mathbb{N}$.

L'inégalité équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
9{,}92x + 30 &\leq 12{,}4x \\
9{,}92x + 30 - 12{,}4x &\leq 12{,}4x - 12{,}4 \\
(9{,}92 - 12{,}4)x + 30 &\leq 0 \\
-2{,}48x + 30 &\leq 0 \\
-2{,}48x + 30 - 30 &\leq 0 - 30 \\
-2{,}48x &\leq -30
\end{aligned}$$

puisque $-2{,}48 < 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{-2{,}48x}{-2{,}48} &\geq \frac{-30}{-2{,}48} \\
x &\geq \frac{375}{31}
\end{aligned}$$

Or $\frac{375}{31} \approx 12{,}09677$, donc

$$\boxed{\text{Le tarif 2 devient avantageux à partir de 13 allers simples.}}$$

5. **Les dangers de l'autoroute.**

Information :
Pour un véhicule, la distance d'arrêt D_a correspond à la somme de la distance de réaction D_r et la distance de freinage D_f :

$$D_a = D_r + D_f.$$

La distance de réaction D_r est la distance parcourue par le véhicule pendant le temps que met le conducteur pour réagir. Le temps de réaction est d'une seconde pour un conducteur en bonne forme et de deux secondes pour un conducteur fatigué.

La distance de freinage, exprimée en mètre, est donnée par la formule $D_f = \dfrac{v^2}{254 \times C_{fl}}$, où v est la vitesse en kilomètre par heure et C_{fl} désigne le coefficient de frottement longitudinal. La distance obtenue est exprimée en mètre.
On admet que le coefficient C_{fl} vaut 0,8 sur route sèche et que sur route mouillée ce coefficient est divisé par deux.

inspiré de : http://www.discip.crdp.ac-caen.fr/phch/college/troisieme/cours/distance_arret/Distance_arret.pdf

Une voiture roule à 120 km/h sur l'autoroute. La chaussée est sèche et le conducteur est fatigué. Tout à coup, un cerf surgit sur la voie et s'arrête, tétanisé par les feux de la voiture. L'animal se trouve à 150 m de la voiture.

(a) Calculer la distance de réaction D_r, arrondie au dixième de mètre, pour cette voiture conduite par un conducteur fatigué.

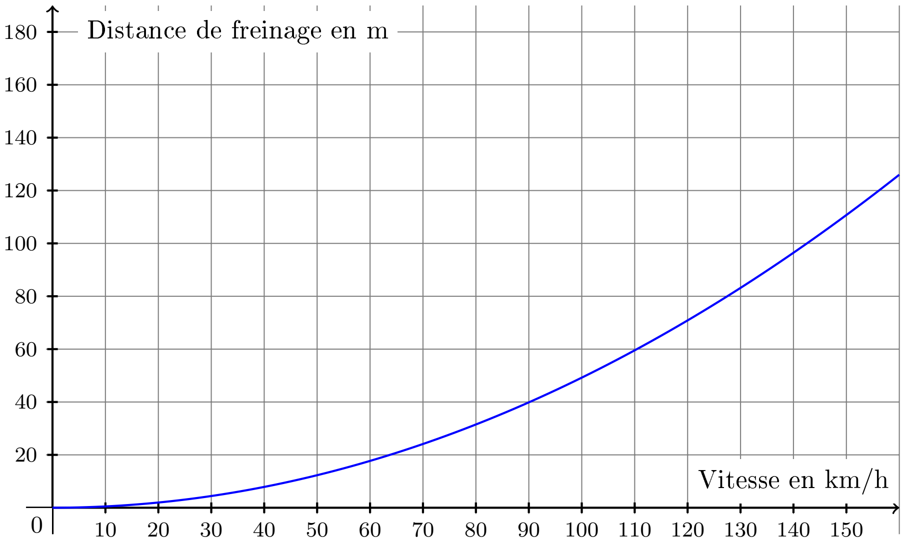
Calculons D_r.

Le conducteur étant fatigué il met deux secondes à réagir *i.e.* $\frac{2}{60\times 60}$ h. Et puisqu'il roule à 120 km/h :

$$\begin{aligned} D_r &= 120 \times \frac{2}{60 \times 60} \\ &= \frac{1}{15} \end{aligned}$$

$$\boxed{D_r \approx 66{,}7 \text{ m.}}$$

(b) On donne ci-dessous la courbe correspondant à la distance de freinage D_f sur route sèche en fonction de la vitesse. Indiquer si la collision avec le cerf pourra être évitée. Justifier.



Distance de freinage en mètre, en fonction de la vitesse en km/h.

Déterminons si la collision peut être évitée.

Elle sera évitée si $D_a \leq 150$. Or

$$\begin{aligned} D_a &= D_r + D_f \\ &= \frac{100}{15} + D_f \end{aligned}$$

donc il faut que

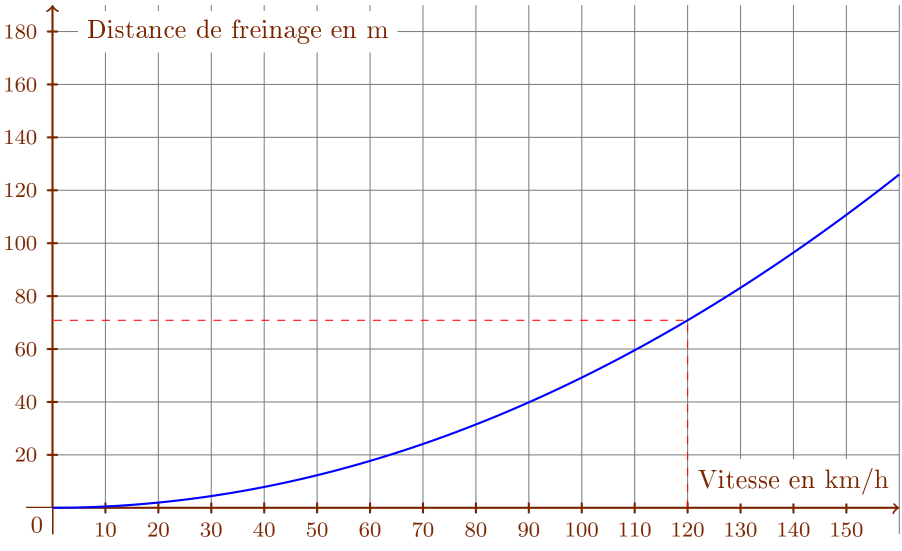
$$\frac{100}{15} + D_f \leq 150$$

Ce qui équivaut encore à

$$\begin{aligned}\frac{100}{15} + D_f - \frac{100}{15} &\leq 150 - \frac{100}{15}\\ D_f &\leq 150 - \frac{100}{15}\\ &\leq \frac{280}{3}\\ &\approx 93{,}3\end{aligned}$$

Par lecture graphique nous obtenons qu'en roulant à 120 km/h,

$$D_f \approx 72 \text{ m},$$



Distance de freinage en mètre, en fonction de la vitesse en km/h.

La collision sera évitée puisque le véhicule s'arrêtera à une vingtaine de mètres du cerf.

(c) Exprimer une formule à écrire dans la cellule B3 du tableur ci-dessous pour calculer la distance de freinage D_f, en mètre, formule que l'on fera ensuite glisser pour l'étendre aux autres cellules de la colonne B du tableur.

B3

	A	B
1	Distance de freinage Route sèche	
2	V (km / h)	D_f (m)
3	10	
4	20	
5	30	
6	40	
7	50	
8	60	
9	70	
10	80	
11	90	
12	100	
13	110	
14	120	
15	130	
16		

En reprenant la formule donnée par l'énoncé et puisque la route est sèche

En B3 :

$$= A3 * A3/(254 * 0{,}8).$$

II Deuxième partie (13 points).

Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

Exercice 1.

Au mois de février 2017, on a interrogé 12 527 personnes de plus de 15 ans à la sortie du métro, à propos du nombre de fois où elles sont allées au restaurant pendant le mois de janvier 2017. Chaque personne sondée est enregistrée par un numéro, de 1 à 12 527.

Le tableau ci-dessous présente des résultats, selon la classe d'âge des personnes interrogées.

	De 15 à 25 ans	De 26 à 44 ans	De 45 à 60 ans	Plus de 60 ans	Total
Pas du tout		82	415	147	666
Un fois	682		1 243	589	
Deux fois		634	552	138	1 737
Trois fois	174	95			1 907
Quatre fois ou plus	251	418	923	317	
Total	1 542		3 517	2 445	

1. Reproduire et compléter le tableau ci-dessus.

   Complétons le tableau en sommant pour obtenir les bons totaux et en sachant que 12 527 personnes au total ont été interrogées.

	De 15 à 25 ans	De 26 à 44 ans	De 45 à 60 ans	Plus de 60 ans	Total
Pas du tout	22	82	415	147	666
Un fois	682	3 794	1 243	589	6 308
Deux fois	413	634	552	138	1 737
Trois fois	174	95	384	1 254	1 907
Quatre fois ou plus	251	418	923	317	1 909
Total	1 542	5 023	3 517	2 445	12 527

2. On tire au hasard un des numéros correspondant aux personnes interrogées, en supposant que chacun a la même probabilité d'être choisi.

   (a) Déterminer la probabilité que ce numéro corresponde à une personne qui est allée exactement deux fois au restaurant pendant le mois de janvier 2017.

   Notons E_1 l'événement « la personne choisie est allée exactement deux fois au restaurant ».

   Calculons $P(E_1)$.

   Le choix des numéros étant équiprobable, l'univers comportant 12 527 issues, E_1 étant réalisé par 1 737 issues

$$\boxed{P(E_1) = \frac{1\,737}{12\,527}.}$$

(b) Déterminer la probabilité que ce numéro corresponde à une personne qui a moins de 45 ans.

Notons E_2 l'événement « la personne choisie a moins de 45 ans ».

Calculons $P(E_2)$.

Le choix des numéros étant équiprobable, l'univers comportant 12 527 issues, E_2 étant réalisé par $1\,545 + 5\,023 = 6\,565$ issues

$$P(E_2) = \frac{6\,565}{12\,527}.$$

(c) Déterminer la probabilité que ce numéro corresponde à une personne qui a plus de 60 ans et qui est allée au moins trois fois au restaurant pendant le mois de janvier 2017.

Notons E_3 l'événement « la personne choisie a plus de 60 ans et est allée au moins trois fois au restaurant ».

Calculons $P(E_3)$.

Le choix des numéros étant équiprobable, l'univers comportant 12 527 issues, E_3 étant réalisé par $1\,254 + 317 = 1\,571$ issues

$$P(E_3) = \frac{1\,571}{12\,527}.$$

Exercice 2.

On utilise le programme ci-dessous.

1. Quel résultat s'affiche si l'on choisit d'entrer le nombre 7 ?

   $7 < 10$ donc le résultat affiché est $5 \times 7 + 3 = 38$.

   Si l'on entre 7 le programme retourne 38.

2. Quel résultat s'affiche si l'on choisit d'entrer le nombre 12,7 ?

   $12{,}7 > 10$ donc le résultat affiché est $2 \times 12{,}7 - 7 = 18{,}4$.

   Si l'on entre 12,7 le programme retourne 18,4.

3. Quel résultat s'affiche si l'on choisit d'entrer le nombre -6 ?

   $-6 < 10$ donc le résultat affiché est $5 \times (-6) + 3 = -27$.

   Si l'on entre 6 le programme retourne -27.

Exercice 3.

Indiquer si les affirmations suivantes sont justes ou fausses en justifiant la réponse.

Une réponse exacte, mais non justifiée, ne rapporte aucun point. Une réponse fausse n'enlève aucun point.

1. Affirmation : « 117 est un nombre premier. »

   $1 + 1 + 7 = 9$ et 9 est divisible par 3, donc 117 est divisible par 3.

   L' affirmation 1 est fausse.

2. (a) Affirmation : « Pour n'importe quel nombre entier n, $(n+2)^2 - (n-2)^2$ est un multiple de 8. »

$$\begin{aligned}(n+2)^2 - (n-2)^2 &= [(n+2) - (n-2)] \times [(n+2) + (n-2)] \\ &= 4[2n] \\ &= 8n\end{aligned}$$

L'affirmation 2.(a) est vraie.

(b) Affirmation : « Pour n'importe quel nombre entier n, $(n+2)^2-(n-2)^2$ est un multiple de 32. »

Pour $n=1$, $(1+2)^2-(n-2)^2=8$ n'est pas un multiple de 32.

L'affirmation 2.(b) est fausse.

3. Affirmation : « Il existe au moins un nombre entier pair supérieur à 7, divisible par 3 mais divisible ni par 9 ni par 4. »

Par une démarche d'analyse synthèse nous obtenons la forme d'une réponse : $2\times 3\times n$ avec n qui n'est divisible ni par 2 ni par 3.

$30=2\times 3\times 5$ convient.

L'affirmation 3 est vraie.

4. Affirmation : « 6 est l'unique solution de l'équation $(x-7)(x+4)=(x-7)(16-x)$. »

Même si 6 est solution, elle ne peut être unique puisque 7 est une solution évidente.

L'affirmation 4 est fausse.

5. On réduit respectivement la largeur et la longueur d'un rectangle de 20 % et de 10 %.
Affirmation : « L'aire du rectangle ainsi obtenu a diminué de 28 % »

Déterminons l'aire du rectangle.

Notons l et L respectivement les largeur et longueur du rectangle.
Le coefficient multiplicateur correspondant à une diminution de 20 % est

$$\begin{aligned} CM_1 &= 1+\frac{t_1}{100}\\ &= 1+\frac{-20}{100}\\ &= 0{,}8 \end{aligned}$$

De même le coefficient multiplicateur correspondant à une diminution de 19 % est

$$CM_2 = 0{,}9.$$

L'aire du nouveau rectangle est donc

$$(0{,}8 \times l) \times (0{,}9 \times L) = 0{,}72 \times l \times L$$

Ainsi l'aire du rectangle a été multipliée par 0,72. Le taux d'évolution, en pourcentage, correspondant est

$$\begin{aligned} t &= 100 \times (CM - 1) \\ &= 100 \times (0{,}72 - 1) \\ &= 28 \end{aligned}$$

L'affirmation 5 est vraie.

6. Un rectangle a une longueur et une largeur qui mesurent respectivement 6 cm et 9 cm. On réduit la largeur de 20 % et la longueur 10 %.
Affirmation : « Le périmètre du rectangle ainsi obtenu a diminué de 15 %. »

Le périmètre du rectangle initial est

$$p_1 = 2 \times (6 + 9) = 30.$$

La nouvelle largeur est

$$l_2 = \left(1 + \frac{-20}{100}\right) \times 6 = 0{,}8 \times 6 = 4{,}8.$$

La nouvelle longueur est

$$L_2 = \left(1 + \frac{-10}{100}\right) \times 9 = 0{,}9 \times 9 = 8{,}1.$$

Le périmètre du nouveau rectangle est donc

$$p_2 = 2 \times (4{,}8 + 8{,}1) = 25{,}8.$$

Le taux d'évolution, en pourcentage, entre les deux périmètres est donc de

$$\begin{aligned} t &= \frac{V_A - V_D}{V_D} \times 100 \\ &= \frac{25{,}8 - 30}{30} \times 100 \\ &= -14 \end{aligned}$$

Le périmètre a donc diminué de 14 %.

L'affirmation 6 est fausse.