Épreuve de mathématiques CRPE 2016 groupe 4.

Lien vers le sujet seul : pdf.

I Première partie (13 points).

Dans cet exercice toutes les longueurs sont exprimées en centimètres, c'est pourquoi nous n'indiquerons pas les unités dans les calculs.

Partie A : étude préliminaire, relations métriques dans un triangle rectangle.

1. (a) Démontrons que ABC est rectangle en C.

D'une part :

$$\begin{aligned} AC^2 + CB^2 &= 4{,}5^2 + 6^5 \\ &= 56{,}25 \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} AC^2 &= 7{,}5^2 \\ &= 56{,}25 \end{aligned}$$

donc

$$AC^2 + CB^2 = AC^2.$$

Par conséquent, d'après la réciproque du théorème de Pythagore

$$\boxed{ABC \text{ est rectangle en } C.}$$

Calculons l'aire $\mathscr{A}(ABC)$ de ABC.

Puisque ABC est rectangle en C et que les longueurs sont toutes exprimées en centimètres :

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(ABC) &= \frac{1}{2} \times AC \times CB \\ &= \frac{1}{2} \times 4{,}5 \times 6 \\ &= 13{,}5 \end{aligned}$$

$$\mathscr{A}(ABC) = 13{,}5 \text{ cm}^2.$$

(b) Calculons CH.

Puisque CH est la hauteur issue de C :

$$\mathscr{A}(ABC) = \frac{1}{2} \times CH \times AB$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 13{,}5 &= \frac{1}{2} \times CH{,}5 \\ 13{,}5 &= 3{,}75 \times CH \\ \frac{13{,}5}{3{,}75} &= \frac{3{,}75 \times CH}{3{,}75} \\ 3{,}6 &= CH \end{aligned}$$

$$CH = 3{,}6 \text{ cm}.$$

(c) Calculons AH.

AHC est rectangle en H donc, d'après le théorème de Pythagore

$$AH^2 + HC^2 = AC^2$$

Nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned} AH^2 + 3{,}6^2 &= 4{,}5^2 \\ AH^2 + 12{,}96 &= 20{,}25 \\ AH^2 + 12{,}96 - 12{,}96 &= 20{,}25 - 12{,}96 \\ AH^2 &= 7{,}29 \end{aligned}$$

Puisque AH est une longueur, c'est un nombre positif et donc :

$$AH = \sqrt{7{,}29}$$

$$\boxed{AH = 2{,}7 \text{ cm.}}$$

Calculons HB.

Puisque $H \in [AB]$:

$$\begin{aligned} HB &= AB - AH \\ &= 7{,}5 - 2{,}7 \end{aligned}$$

$$\boxed{HB = 4{,}8 \text{ cm.}}$$

(d) Vérifions l'égalité proposée.

$CH^2 = 3{,}6^2 = 12{,}96$ et $AH \times HB = 2{,}7 \times 4{,}8 = 12{,}96$. Donc :

$$\boxed{CH^2 = AH \times BH.}$$

2. (a) Suivant en cela l'usage nous confondrons les angles et leur mesure.

Justifions que $\widehat{CBH}$ et $\widehat{ACH}$ ont même mesure.

Notons θ une mesure en degré de $\widehat{ACH}$.
Puisque $\widehat{ACB}$ est droit, $\widehat{HCB} = 90 - \theta$.
Puisque la somme des mesures des angles d'un triangle est 180 et que $\widehat{BHC} = 90$,

$$\widehat{CBH} = 180 - 90 - (90 - \theta).$$

Autrement dit : $\widehat{CBH} = \theta$.

$$\boxed{\widehat{CBH} = \widehat{ACH}.}$$

(b) Démontrons que $HC^2 = AH \times BH$.

ACH est rectangle en H donc

$$\tan\left(\widehat{ACH}\right) = \frac{AH}{CH}.$$

BCH est rectangle en H donc

$$\tan\left(\widehat{CBH}\right) = \frac{CH}{BH}.$$

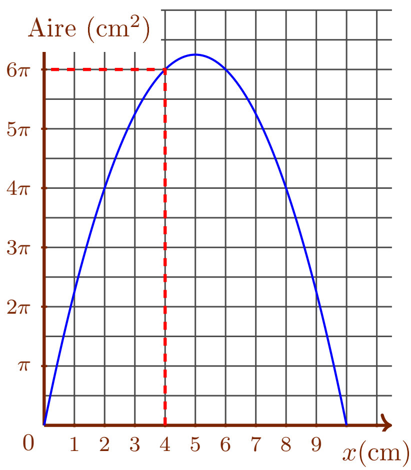
Or, d'après la question précédente $\widehat{CBH} = \widehat{ACh}$, donc

$$\frac{AH}{CH} = \frac{CH}{BH}.$$

En procédant à un produit en croix :

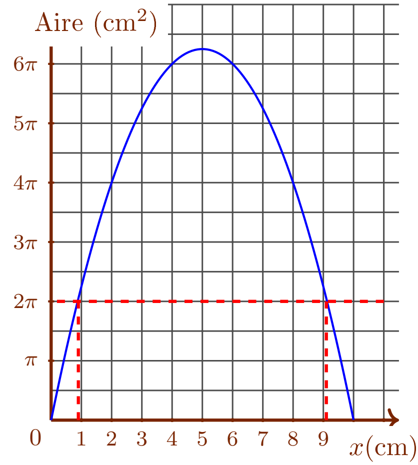
$$\boxed{AH \times BH = CH^2.}$$

Partie B : étude de l'aire d'un arbelos dans un cas particulier.



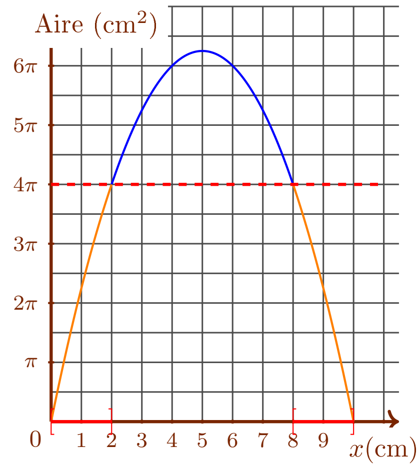
1. (a)

$$\boxed{\mathscr{A}(4) = 6\pi.}$$



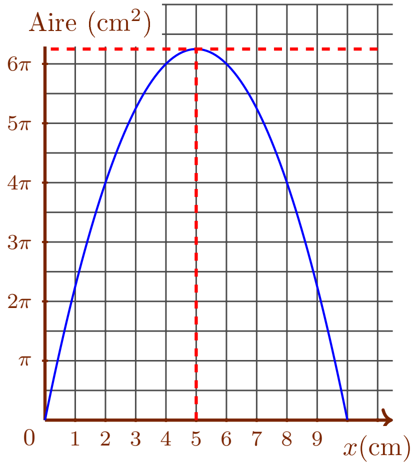
(b)

L'aire égale 2π cm^2 lorsque x est choisi égale à 0,9 ou 9,1.



(c)

L'aire est comprise entre 0 et 4π lorsque $x \in [0;2] \cup [8;10]$.



(d) i.

l'aire de l'arbelos est maximale lorsque $BH = 5$ cm.

ii. L'aire maximale est approximativement $6{,}25\pi$.

2. (a) $H \in [AB]$, $AB = 10$ cm et $HB = x$ donc

$x \in [0; 10]$.

(b) Déterminons $\mathscr{A}(x)$.

L'arbélos est formé d'un grand demi-disque dont on ôte deux demi-disques plus petits donc :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(x) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\pi AB^2 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\pi AH^2 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\pi HB^2 \\ &= \frac{1}{8}\pi 10^2 - \frac{1}{8}\pi(10-x)^2 - \frac{1}{8}\pi x^2\end{aligned}$$

Nous pourrions nous arrêter ici, cependant en prévision de la question précédente nous allons donner la forme développée, ordonnée et réduite de cette expression polynomiale.

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(x) &= \frac{25}{2}\pi - \frac{1}{8}\pi\left(10^2 - 2\times 10\times x + x^2\right) - \frac{1}{8}\pi x\\ &= \frac{25}{2}\pi - \frac{1}{8}\pi\left(100 - 20x + x^2\right) - \frac{1}{8}\pi x^2\\ &= \frac{25}{2}\pi - \frac{1}{8}\pi\times 100 + \frac{1}{8}\pi\times 20x - \frac{1}{8}\pi x^2 - \frac{1}{8}\pi x^2\\ &= -\frac{1}{4}\pi x^2 + \frac{5}{2}\pi x\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(x) = -\tfrac{1}{4}\pi x^2 + \tfrac{5}{2}\pi x.}$$

(c) Démontrons que l'expression proposée pour $\mathscr{A}(x)$ convient.

Nous reconnaissons la forme canonique d'un trinôme du second degré. Nous pourrions donc calculer α et β. Cependant nous allons développer l'expression proposée pour vérifier qu'elle convient.

$$\begin{aligned}\frac{25\pi}{4} - \frac{\pi}{4}(x-5)^2 &= \frac{25\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\left(x^2 - 2\times x\times 5 + 5^2\right)\\ &= \frac{25\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\left(x^2 - 10x + 25\right)\\ &= \frac{25\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\times x^2 + \frac{\pi}{4}\times 10x - \frac{\pi}{4}\times 25\\ &= -\frac{\pi}{4}x^2 + \frac{5}{2}\pi x\\ &= \mathscr{A}(x)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Nous avons bien : } -\tfrac{25\pi}{4} - \tfrac{\pi}{4}(x-5)^2 = \mathscr{A}(x).}$$

(d) Déterminons le maximum de $\mathscr{A}$.

D'après la question précédente $\mathscr{A}$ est un trinôme du second degré dont nous connaissons la forme canonique et : $a = -\frac{\pi}{4}$, $\alpha = 5$, et $\beta = \frac{25\pi}{4}$. Puisque $a < 0$ la parabole est orientée vers le bas et nous en déduisons son tableau de variation.
L'ensemble de définition de $\mathscr{A}$ a été déterminé à la question B 2.(a).

x	0		5		10
$\mathscr{A}$	0	$\nearrow$	$\frac{25\pi}{4}$	$\searrow$	0

L'aire maximale est 6,25π cm^2 et elle est atteinte pour $x = 5$ cm.

Partie C : étude de l'aire d'un arbelos dans le cas général.

1. Déterminons l'aire $\mathscr{A}$ de l'arbélos.

   En raisonnant comme précédemment avec les aires des demi-disques :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\pi(x+y)^2 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\pi y^2 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\pi x^2 \\
&= \frac{1}{8}\pi \left[(x+y)^2 - y^2 - x^2\right] \\
&= \frac{\pi}{8} \left[x^2 + 2 \times x \times y + y^2 - x^2 - y^2\right] \\
&= \frac{\pi}{8} \times 2xy
\end{aligned}$$

   $\mathscr{A} = \frac{\pi}{4}xy$.

2. $[AB]$ est un diamètre du cercle et C un point du cercle donc :

   ABC est rectangle en C.

3. Nous avons établi à la question A 2.(b) que, puisque ABC est rectangle en C, $xy = h^2$ donc, d'après la question C 1. :

   $\mathscr{A} = \frac{\pi}{4}h^2$.

Partie D : prolongements.

1. Déterminons le périmètre $\mathscr{P}_2$ de la partie hachurée.

   rappelons que le périmètre d'un cercle de diamètre d est πd.
   Puisque que le périmètre est formé de deux demi-cercles de diamètre $\frac{10}{2}$ et du segment $[AB]$ de longueur 10 :

$$\mathscr{P}_2 = 2 \times \frac{1}{2} \times \pi \frac{10}{2} + 10$$

$$\boxed{\mathscr{P}_2 = 5\pi + 10 \text{ cm.}}$$

   Calculons l'aire $\mathscr{A}_2$ hachurée.

   Nous savons que l'aire d'un demi-disque de diamètre d est $\frac{\pi}{8}d^2$, donc pour deux demi-disque de diamètre $\frac{10}{2}$, l'aire hachurée est de

$$\mathscr{A}_2 = 2 \times \left[\frac{\pi}{8}\left(\frac{10}{2}\right)^2\right]$$

$$\boxed{\mathscr{A}_2 = 6{,}25\pi \text{ cm}^2 \,;}$$

2. En procédant comme précédemment :

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathscr{P}_4 = 5\pi + 10 \text{ cm.} \\ \mathscr{A}_4 = 3{,}125\pi \text{ cm}^2. \end{array}}$$

3. (a) Le diamètre d'un petit demi-disque dans un découpage en n est $\frac{10}{n}$.
   Donc la moitié du périmètre d'un disque est $\frac{1}{2} \times \pi \frac{10}{n}$.
   Nous en déduisons le périmètre total :

$$\mathscr{P}_n = n \times \frac{1}{2} \times \pi \frac{10}{n} + 10$$

$$\boxed{\mathscr{P}_n = 5\pi + 10 \text{ cm.}}$$

(b) L'aire d'un demi-disque est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\left(\frac{10}{n}\right)^2$ donc l'aire hachurée est :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_n &= n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\left(\frac{10}{n}\right)^2 \\ &= n \times \frac{1}{8} \times \frac{100}{n^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{P}_n = \frac{25\pi}{2n} \text{ cm}^2.}$$

4. Résolvons l'inéquation $\mathscr{A}_n \leqslant 0{,}1$.

$$\mathscr{A}_n \leqslant 0{,}1$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}\frac{25\pi}{2n} &\leqslant 0{,}1 \\ \frac{25\pi}{2n} \times n &\leqslant 0{,}1 \times n \quad \text{car } n > 0 \\ 12{,}5\pi &\leqslant 0{,}1n \\ \frac{12{,}5\pi}{0{,}1} &\leqslant \frac{0{,}1n}{0{,}1} \quad \text{car } 0{,}1 > 0 \\ 125\pi &\leqslant n\end{aligned}$$

Comme $125\pi \approx 392{,}699$

l'aire de la surface hachurée sera inférieure à 0,1 à partir de $n = 393$.

Dans ce cas comme dans tous les autres le périmètre est de $5\pi + 10$ cm.

II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

1. Modélisation de l'expérience aléatoire.
   $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ muni de la loi d'équiprobabilité.
   Notons A : « obtenir un nombre pair ».

   Calculons $\mathbb{P}(A)$.

   $A = \{2,4,6\}$.
   Il y a équiprobabilité, A est réalisé par 3 issues et l'univers en comporte 6 donc
   $$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6}.$$

   $$\boxed{\mathbb{P}(A) = \tfrac{1}{2}.}$$

2. Modélisation de l'expérience aléatoire.
   Ω est formé de tous les couples d 'entiers entre 1 et 6 correspondant aux résultats affichés sur les deux faces. L'univers est muni de l'équiprobabilité : chaque couple de nombres a la même probabilité d'être obtenu qu'un autre.
   Notons B : « obtenir une somme égalant 8 ».

   Calculons $\mathbb{P}(B)$.

   Nous devons trouver toutes les issues correspondant à l'événement B. Pour cela nous allons représenter toutes les sommes possibles sous forme d'un tableau double-entrée.

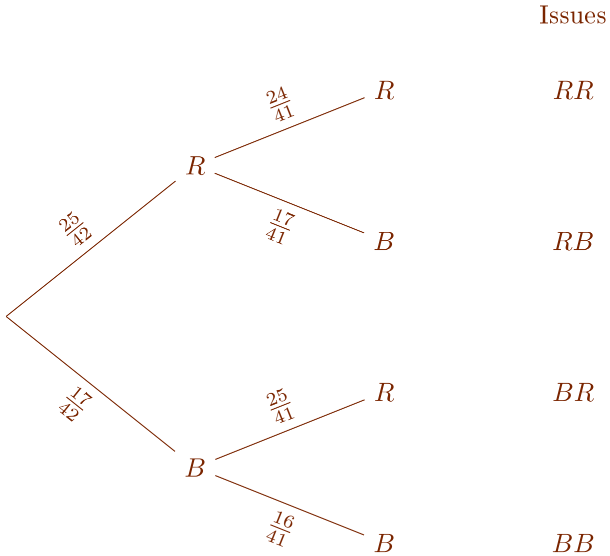
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

   Il y a équiprobabilité B est réalisé par 5 issues, l'univers en comporte 36 donc

   $$\boxed{\mathbb{P}(B) = \tfrac{5}{36}.}$$

3. Modélisation de l'expérience aléatoire.
   Ω est formé de tous les couples, obtenus après les deux tirages, de couleurs rouges et bleus. $\Omega = \{RR,RB,BR,BB\}$. La loi de probabilité n'est pas évidente.

Pour calculer les probabilités nous allons utiliser un arbre pondéré. L'expérience est formée de deux épreuves à deux issues (tirer un jeton) donc l'arbre aura deux niveaux.



Notons E : « obtenir deux jetons de même couleur ».

Calculons $\mathbb{P}(E)$.

$E = \{RR,BB\}$.
Donc

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(RR) + \mathbb{P}(BB)$$

Nous en déduisons d'après le principe multiplicatif (formule des probabilités composées) :

$$\mathbb{P}(E) = \frac{25}{42} \times \frac{24}{41} + \frac{17}{42} \times \frac{16}{41}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(E) = \tfrac{436}{861}.}$$

Exercice 2.

Déterminons le taux d'évolution t_c de l'aire lorsque son côté augmente de 100 %.

Il s'agit de passer par les coefficients multiplicateurs pour simplifier les calculs.
Notons c la longueur du côté du carré initial et $\mathscr{A}_i$ son aire.
Une augmentation de 100 % correspond à une multiplication par :

$$\begin{aligned} CM &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{100}{100} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Puisque c a été multiplié par 2 l'aire finale du carré (après agrandissement) est :

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_f &= (2c)^2 \\ &= 2^2c^2 \\ &= 4c^2 \\ &= 4\mathscr{A}_i \end{aligned}$$

Ainsi l'aire initiale a été multipliée par 4. Le taux d'évolution correspondant à ce coefficient multiplicateur est

$$\begin{aligned} t_c &= 100 \times (CM - 1) \\ &= 100 \times (4 - 3) \\ &= 300 \end{aligned}$$

L'aire du carré a augmenté de 300 %.

Exercice 3.

1. (a) Déterminons la valeur retournée lorsque la valeur 5 est choisie.

Construisons le tableau d'état des variables de ce programme en notant x la valeur de départ choisie et r la variable qui contiendra le résultat souhaité.

Instructions	x	r
Choisir un nombre.	5	
Ajouter 6.	5	$5+6=11$
Multiplier par le nombre de départ.	5	$11\times 5=55$
Ajouter 9.	5	$55+9=64$
Afficher le résultat.		64

Lorsque 5 est choisi le programme renvoie 64.

(b) Déterminons la valeur retournée lorsque la valeur 10 est choisie.

Instructions	x	r
Choisir un nombre.	10	
Ajouter 6.	10	$10+6=16$
Multiplier par le nombre de départ.	10	$16\times 10=160$
Ajouter 9.	10	$160+9=169$
Afficher le résultat.		169

Lorsque 10 est choisi le programme renvoie 169.

2. Déterminons la valeur retournée lorsque la valeur x est choisie.

Instructions	x	r
Choisir un nombre.	x	
Ajouter 6.	x	$x+6$
Multiplier par le nombre de départ.	x	$(x+6)\times x$
Ajouter 9.	x	$(x+6)x+9$
Afficher le résultat.		$(x+6)x+9$

la formule choisie est $\boxed{=(\texttt{B1}+6)*\texttt{B1}+9}$.

3. Il semblerait que le nombre obtenu soit le carré de $x+3$ lorsque x est le nombre choisi.

4. Démontrons que $(x+3)^2 = (x+6)x + 9$.

   Développons, ordonnons et réduisons les deux expressions.
   D'une part

$$\begin{aligned}(x+3)^2 &= x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 \\ &= x^2 + 6x + 9\end{aligned}$$

   et d'autre part

$$\begin{aligned}(x+6)x + 9 &= x \times x + 6 \times x + 9 \\ &= x^2 + 6x + 9\end{aligned}$$

   donc, par transitivité, nous avons bien

$$\boxed{(x+3)^2 = (x+6)x + 9.}$$

Exercice 4.

1. Pour la parcelle B, $Q_3 = 9$ cm donc au moins 75 % des carottes mesurent moins de 9 cm donc

   l'affirmation 1 est vraie.

2. Sur la parcelle A le minimum et $min = 4{,}5$ cm et l'étendue est $e = 9$ cm donc la taille maximale est $max = min + e = 13{,}5$ cm.

   L'affirmation 2 est fausse.

3. Déterminons la longueur moyenne, $\overline{x}$, d'une carotte.

   Il s'agit de faire une moyenne de moyennes donc prudence. Il faut considérer que la parcelle A contient 400 carottes de 9,5 cm et la B 500 carottes de 8,8 cm.

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{400 \times 9{,}5 + 500 \times 8{,}8}{400 + 500} \\ &= \frac{82}{9} \\ &= 9{,}111\ldots\end{aligned}$$

L'affirmation 3 est fausse.

4. Les premiers quartiles des deux échantillons étant de 7, nous pouvons affirmer que strictement moins de 25 % des carottes ont une taille inférieure à 6,9 cm. Par conséquent

l'affirmation 4 est fausse.

III Troisième partie (14 points).

Situation 1.

1. (a)
   (b)
2.

Situation 2.

1.
2.
3.

Situation 3.

1.
2.
3.
4.
5.
6.