Épreuve de mathématiques CRPE 2016 groupe 4.

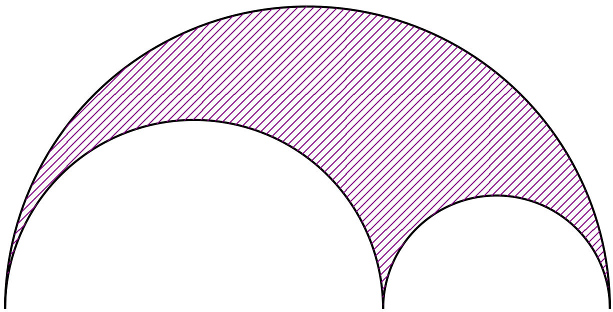
Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Durée : 4 heures.
Épreuve notée sur 40.

I Première partie (13 points).

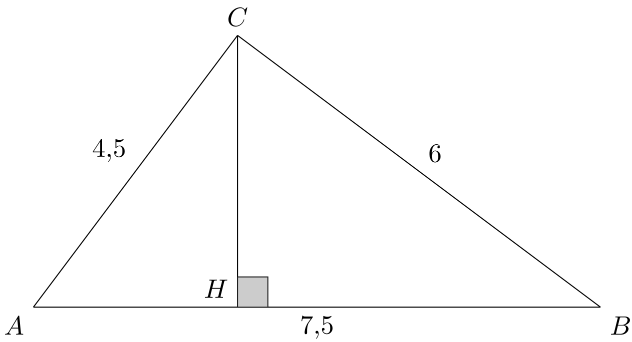
L'arbelos est une figure géométrique qui doit son nom à un outil appelé tranchet du cordonnier. Cette figure a été étudiée par Archimède il y a plus de deux millénaires.



Dans cet exercice toutes les longueurs sont exprimées en centimètres, c'est pourquoi nous n'indiquerons pas les unités dans les calculs.

Partie A : étude préliminaire, relations métriques dans un triangle rectangle.

1. *Étude d'un cas particulier.*
   Soit ABC un triangle de dimensions : $AB = 7{,}5$ cm ; $BC = 6$ cm ; $AC = 4{,}5$ cm.
   On appelle H le pied de la hauteur issue du sommet C.



(a) Vérifier que le triangle ABC est rectangle en C. En déduire que l'aire du triangle ABC est égale à 13,5 cm^2.

Démontrons que ABC est rectangle en C.

D'une part :

$$\begin{aligned} AC^2 + CB^2 &= 4{,}5^2 + 6^5 \\ &= 56{,}25 \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} AC^2 &= 7{,}5^2 \\ &= 56{,}25 \end{aligned}$$

donc

$$AC^2 + CB^2 = AC^2.$$

Par conséquent, d'après la réciproque du théorème de Pythagore

$$\boxed{ABC \text{ est rectangle en } C.}$$

Calculons l'aire $\mathscr{A}(ABC)$ de ABC.

Puisque ABC est rectangle en C et que les longueurs sont toutes exprimées en centimètres :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ABC) &= \frac{1}{2} \times AC \times CB \\ &= \frac{1}{2} \times 4{,}5 \times 6 \\ &= 13{,}5\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(ABC) = 13{,}5 \text{ cm}^2.}$$

(b) En calculant d'une autre façon l'aire du triangle ABC, en déduire que la longueur CH est 3,6 cm.

Calculons CH.

Puisque CH est la hauteur issue de C :

$$\mathscr{A}(ABC) = \frac{1}{2} \times CH \times AB$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}13{,}5 &= \frac{1}{2} \times CH{,}5 \\ 13{,}5 &= 3{,}75 \times CH \\ \frac{13{,}5}{3{,}75} &= \frac{3{,}75 \times CH}{3{,}75} \\ 3{,}6 &= CH\end{aligned}$$

$$\boxed{CH = 3{,}6 \text{ cm}.}$$

(c) Calculer les longueurs AH et BH.

Calculons AH.

AHC est rectangle en H donc, d'après le théorème de Pythagore

$$AH^2 + HC^2 = AC^2$$

Nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned} AH^2 + 3{,}6^2 &= 4{,}5^2 \\ AH^2 + 12{,}96 &= 20{,}25 \\ AH^2 + 12{,}96 - 12{,}96 &= 20{,}25 - 12{,}96 \\ AH^2 &= 7{,}29 \end{aligned}$$

Puisque AH est une longueur, c'est un nombre positif et donc :

$$AH = \sqrt{7{,}29}$$

$$\boxed{AH = 2{,}7 \text{ cm.}}$$

Calculons HB.

Puisque $H \in [AB]$:

$$\begin{aligned} HB &= AB - AH \\ &= 7{,}5 - 2{,}7 \end{aligned}$$

$$\boxed{HB = 4{,}8 \text{ cm.}}$$

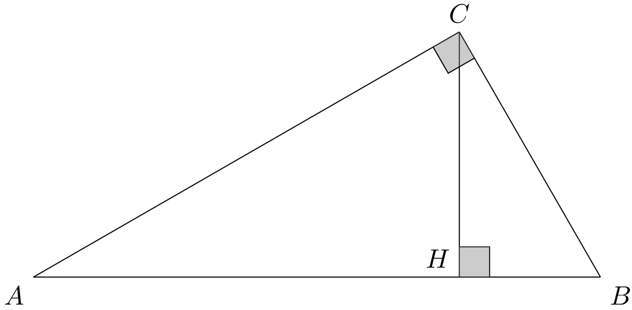
(d) Vérifier que dans ce triangle $CH^2 = AH \times BH$.

Vérifions l'égalité proposée.

$CH^2 = 3{,}6^2 = 12{,}96$ et $AH \times HB = 2{,}7 \times 4{,}8 = 12{,}96$. Donc :

$$\boxed{CH^2 = AH \times BH.}$$

2. *Étude du cas général.*
Soit ABC un triangle rectangle en C.
On appelle H le pied de la hauteur issue du sommet C.



(a) Montrer que les angles $\widehat{CBH}$ et $\widehat{ACH}$ ont même mesure.

Suivant en cela l'usage nous confondrons les angles et leur mesure.

Justifions que $\widehat{CBH}$ et $\widehat{ACH}$ ont même mesure.

Notons θ une mesure en degré de $\widehat{ACH}$.
Puisque $\widehat{ACB}$ est droit, $\widehat{HCB} = 90 - \theta$.
Puisque la somme des mesures des angles d'un triangle est 180 et que $\widehat{BHC} = 90$,

$$\widehat{CBH} = 180 - 90 - (90 - \theta).$$

Autrement dit : $\widehat{CBH} = \theta$.

$$\boxed{\widehat{CBH} = \widehat{ACH}.}$$

(b) En déduire à l'aide des relations trigonométriques que :

$$\frac{CH}{BH} = \frac{AH}{CH}$$

puis que $HC^2 = AH \times BH$.

Démontrons que $HC^2 = AH \times BH$.

ACH est rectangle en H donc

$$\tan\left(\widehat{ACH}\right) = \frac{AH}{CH}.$$

BCH est rectangle en H donc

$$\tan\left(\widehat{CBH}\right) = \frac{CH}{BH}.$$

Or, d'après la question précédente $\widehat{CBH} = \widehat{ACh}$, donc

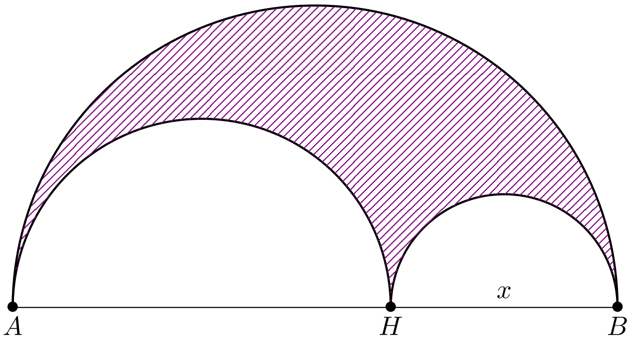
$$\frac{AH}{CH} = \frac{CH}{BH}.$$

En procédant à un produit en croix :

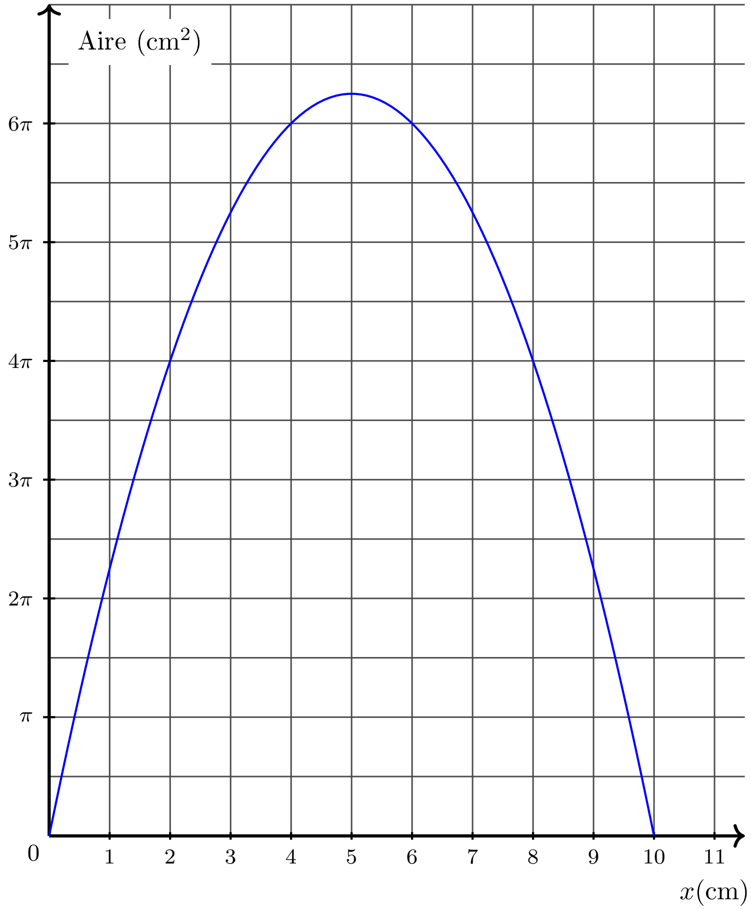
$$\boxed{AH \times BH = CH^2.}$$

Partie B : étude de l'aire d'un arbelos dans un cas particulier.

Dans cette partie, on fixe $AB = 10$ cm.
On considère un point H appartenant au segment $[AB]$, et on note $x = BH$.

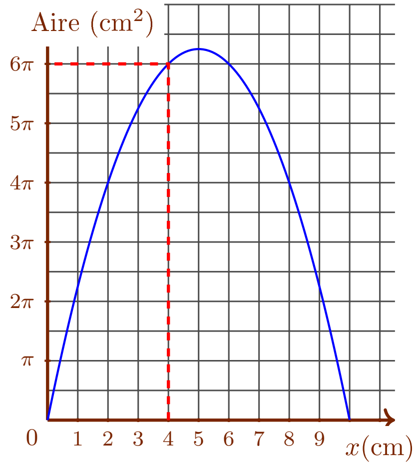


1. *Étude graphique de l'aire.*
   La représentation graphique de la fonction $\mathcal{A}$ exprimant l'aire de l'arbelos en fonction de la distance BH est donnée ci-dessous.



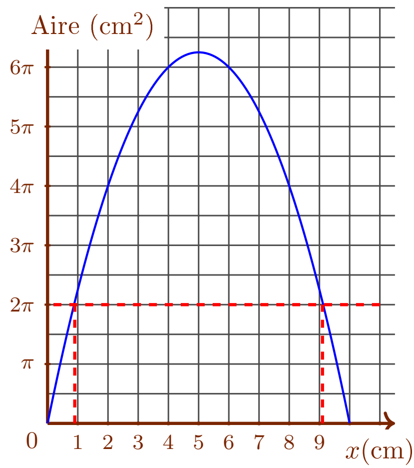
Les réponses aux questions suivantes seront données par lecture graphique.

(a) Donner en fonction de π l'aire de l'arbelos lorsque $x = 4$.



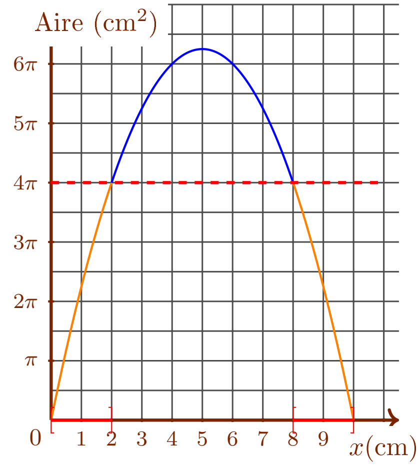
$\mathscr{A}(4) = 6\pi.$

(b) Pour quelles valeurs de BH l'aire de l'arbelos est-elle égale à 2π cm^2 ?



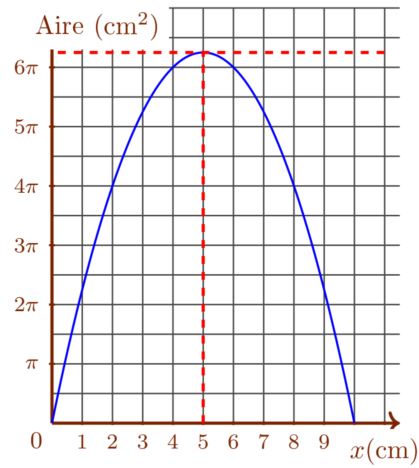
L'aire égale 2π cm^2 lorsque x est choisi égale à 0,9 ou 9,1.

(c) Pour quelles valeurs de BH l'aire est-elle comprise entre 0 et 4π cm^2 ?



L'aire est comprise entre 0 et 4π lorsque $x \in [0;2] \cup [8;10]$.

(d) i. Pour quelles valeurs de BH l'aire de l'arbelos est-elle maximale ?



l'aire de l'arbelos est maximale lorsque $BH = 5$ cm.

ii. Donner en fonction de π la valeur de cette aire maximale.

L'aire maximale est approximativement $6{,}25\pi$.

2. *Vérification algébrique.*

On rappelle que l'aire d'un disque de diamètre d est égale à $\dfrac{1}{4}\pi d^2$.

(a) Quelles valeurs x peut-il prendre ?

$H \in [AB]$, $AB = 10$ cm et $HB = x$ donc

$x \in [0; 10]$.

(b) Exprimer l'aire de l'arbelos $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x.

Déterminons $\mathscr{A}(x)$.

L'arbélos est formé d'un grand demi-disque dont on ôte deux demi-disques plus petits donc :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(x) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\pi AB^2 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\pi AH^2 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\pi HB^2 \\ &= \frac{1}{8}\pi 10^2 - \frac{1}{8}\pi(10-x)^2 - \frac{1}{8}\pi x^2\end{aligned}$$

Nous pourrions nous arrêter ici, cependant en prévision de la question précédente nous allons donner la forme développée, ordonnée et réduite de cette expression polynomiale.

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(x) &= \frac{25}{2}\pi - \frac{1}{8}\pi\left(10^2 - 2 \times 10 \times x + x^2\right) - \frac{1}{8}\pi x \\ &= \frac{25}{2}\pi - \frac{1}{8}\pi\left(100 - 20x + x^2\right) - \frac{1}{8}\pi x^2 \\ &= \frac{25}{2}\pi - \frac{1}{8}\pi \times 100 + \frac{1}{8}\pi \times 20x - \frac{1}{8}\pi x^2 - \frac{1}{8}\pi x^2 \\ &= -\frac{1}{4}\pi x^2 + \frac{5}{2}\pi x\end{aligned}$$

$\mathscr{A}(x) = -\frac{1}{4}\pi x^2 + \frac{5}{2}\pi x$.

(c) Montrer que l'on peut écrire :

$$\mathcal{A}(x) = \frac{25\pi}{4} - \frac{\pi}{4}(x-5)^2.$$

Démontrons que l'expression proposée pour $\mathscr{A}(x)$ convient.

Nous reconnaissons la forme canonique d'un trinôme du second degré. Nous pourrions donc calculer α et β. Cependant nous allons développer l'expression proposée pour vérifier qu'elle convient.

$$\begin{aligned}
\frac{25\pi}{4} - \frac{\pi}{4}(x-5)^2 &= \frac{25\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\left(x^2 - 2\times x\times 5 + 5^2\right)\\
&= \frac{25\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\left(x^2 - 10x + 25\right)\\
&= \frac{25\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\times x^2 + \frac{\pi}{4}\times 10x - \frac{\pi}{4}\times 25\\
&= -\frac{\pi}{4}x^2 + \frac{5}{2}\pi x\\
&= \mathscr{A}(x)
\end{aligned}$$

Nous avons bien : $-\frac{25\pi}{4} - \frac{\pi}{4}(x-5)^2 = \mathscr{A}(x)$.

(d) Vérifier par le calcul les valeurs déterminées graphiquement pour l'aire maximale de la question B 1.(d).

Déterminons le maximum de $\mathscr{A}$.

D'après la question précédente $\mathscr{A}$ est un trinôme du second degré dont nous connaissons la forme canonique et : $a = -\frac{\pi}{4}$, $\alpha = 5$, et $\beta = \frac{25\pi}{4}$. Puisque $a < 0$ la parabole est orientée vers le bas et nous en déduisons son tableau de variation.
L'ensemble de définition de $\mathscr{A}$ a été déterminé à la question B 2.(a).

x	0		5		10
$\mathscr{A}$	0	$\nearrow$	$\frac{25\pi}{4}$	$\searrow$	0

L'aire maximale est $6{,}25\pi$ cm^2 et elle est atteinte pour $x = 5$ cm.

Partie C : étude de l'aire d'un arbelos dans le cas général.

On donne deux points distincts A et B. On construit un demi-cercle de diamètre $[AB]$.

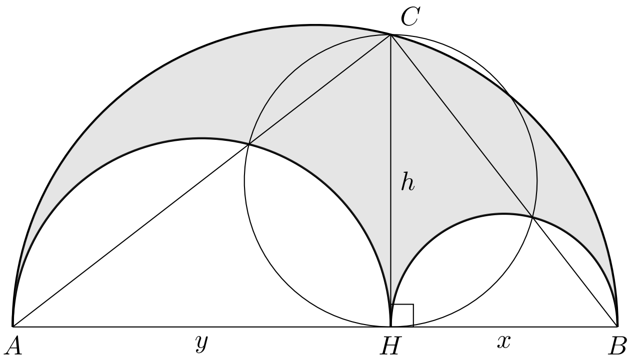
Soit C un point de ce demi-cercle distinct de A et B.

On appelle H le pied de la hauteur du triangle ABC issue du sommet C.

On construit les deux demi-cercles de diamètre $[AH]$ et $[HB]$ situés dans le demi-plan délimité par la droite (AB) contenant C.

On note x la longueur BH, y la longueur AH et h la longueur CH.

L'arbelos est la zone du plan grisée sur la figure.



1. Montrer que l'aire de l'arbelos est égale à $\dfrac{\pi}{4}xy$.

Déterminons l'aire $\mathscr{A}$ de l'arbélos.

En raisonnant comme précédemment avec les aires des demi-disques :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\pi(x+y)^2 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\pi y^2 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\pi x^2 \\
&= \frac{1}{8}\pi \left[(x+y)^2 - y^2 - x^2\right] \\
&= \frac{\pi}{8} \left[x^2 + 2 \times x \times y + y^2 - x^2 - y^2\right] \\
&= \frac{\pi}{8} \times 2xy
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A} = \tfrac{\pi}{4}xy.}$$

2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en C.

   $[AB]$ est un diamètre du cercle et C un point du cercle donc :

   ABC est rectangle en C.

3. Utiliser la relation métrique établie à la question A 2.(b) pour montrer que l'aire de l'arbelos est égale à l'aire du disque de diamètre $[CH]$.

   Nous avons établi à la question A 2.(b) que, puisque ABC est rectangle en C, $xy = h^2$ donc, d'après la question C 1. :

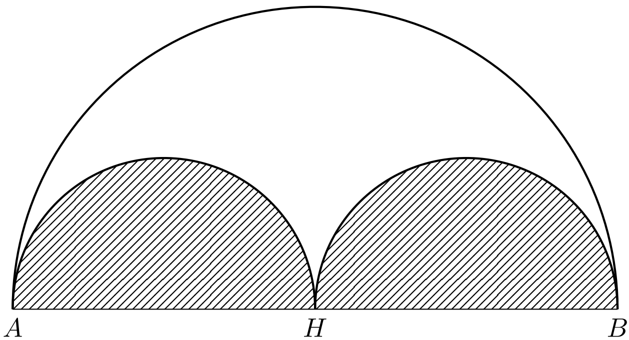
   $$\mathscr{A} = \frac{\pi}{4}h^2.$$

Partie D : prolongements.

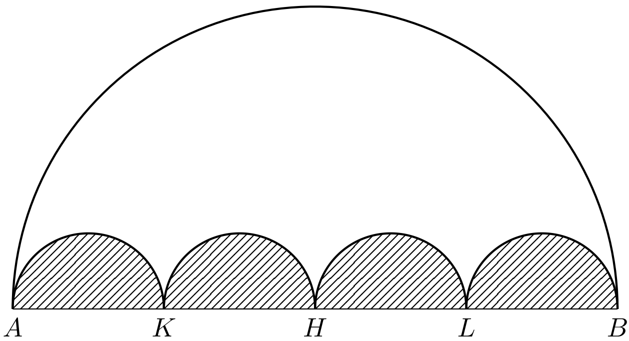
Dans cette partie, le segment $[AB]$ mesure 10 cm. On le partage en n segments d'égale longueur, n étant un entier naturel non nul, puis on construit n demi-disques de diamètres ces n segments comme indiqué dans les exemples ci-dessous.

On s'intéresse au périmètre et à l'aire des figures formées de ces n demi-disques, délimitées par le diamètre $[AB]$ et les n demi-cercles (hachurées dans les deux exemples ci-dessous).

Pour $n = 2$



Pour $n = 4$



1. Dans le cas où $n = 2$, vérifier que le périmètre de la partie hachurée est égal à $5\pi + 10$ cm et que son aire est égale à $6{,}25\pi$ cm^2.

Déterminons le périmètre $\mathscr{P}_2$ de la partie hachurée.

rappelons que le périmètre d'un cercle de diamètre d est πd.
Puisque que le périmètre est formé de deux demi-cercles de diamètre $\frac{10}{2}$ et du segment $[AB]$ de longueur 10 :

$$\mathscr{P}_2 = 2 \times \frac{1}{2} \times \pi \frac{10}{2} + 10$$

$$\boxed{\mathscr{P}_2 = 5\pi + 10 \text{ cm.}}$$

Calculons l'aire $\mathscr{A}_2$ hachurée.

Nous savons que l'aire d'un demi-disque de diamètre d est $\frac{\pi}{8}d^2$, donc pour deux demi-disque de diamètre $\frac{10}{2}$, l'aire hachurée est de

$$\mathscr{A}_2 = 2 \times \left[\frac{\pi}{8} \left(\frac{10}{2} \right)^2 \right]$$

$$\boxed{\mathscr{A}_2 = 6{,}25\pi \text{ cm}^2 \,;}$$

2. Déterminer les valeurs exactes du périmètre puis de l'aire de la partie hachurée dans le cas où $n = 4$.

   En procédant comme précédemment :

   $$\mathscr{P}_4 = 5\pi + 10 \text{ cm.}$$
   $$\mathscr{A}_4 = 3{,}125\pi \text{ cm}^2.$$

3. Étude du cas général.

   (a) Montrer que le périmètre de la surface hachurée est le même quelle que soit la valeur de n.

   Le diamètre d'un petit demi-disque dans un découpage en n est $\frac{10}{n}$.
   Donc la moitié du périmètre d'un disque est $\frac{1}{2} \times \pi\frac{10}{n}$.
   Nous en déduisons le périmètre total :

   $$\mathscr{P}_n = n \times \frac{1}{2} \times \pi\frac{10}{n} + 10$$

   $$\mathscr{P}_n = 5\pi + 10 \text{ cm.}$$

   (b) Monter que l'aire de la surface hachurée est égale à $\dfrac{25\pi}{2n}$ cm^2.

   L'aire d'un demi-disque est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\left(\frac{10}{n}\right)^2$ donc l'aire hachurée est :

   $$\begin{aligned}\mathscr{A}_n &= n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\left(\frac{10}{n}\right)^2 \\ &= n \times \frac{1}{8} \times \frac{100}{n^2}\end{aligned}$$

   $$\mathscr{P}_n = \tfrac{25\pi}{2n} \text{ cm}^2.$$

4. Trouver la plus petite valeur de n pour que l'aire de la surface hachurée soit inférieure à 0,1 cm^2.
   Combien mesure le périmètre pour cette valeur de n ?

Résolvons l'inéquation $\mathscr{A}_n \leqslant 0{,}1$.

$$\mathscr{A}_n \leqslant 0{,}1$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\frac{25\pi}{2n} &\leqslant 0{,}1 \\
\frac{25\pi}{2n}\times n &\leqslant 0{,}1\times n \quad \text{car } n > 0 \\
12{,}5\pi &\leqslant 0{,}1n \\
\frac{12{,}5\pi}{0{,}1} &\leqslant \frac{0{,}1n}{0{,}1} \quad \text{car } 0{,}1 > 0 \\
125\pi &\leqslant n
\end{aligned}$$

Comme $125\pi \approx 392{,}699$

l'aire de la surface hachurée sera inférieure à 0,1 à partir de $n = 393$.

Dans ce cas comme dans tous les autres le périmètre est de $5\pi + 10$ cm.

II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

1. On lance un dé bien équilibré et on considère les points portés sur la face supérieure.
Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair de points ?

Modélisation de l'expérience aléatoire.
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ muni de la loi d'équiprobabilité.
Notons A : « obtenir un nombre pair ».

Calculons $\mathbb{P}(A)$.

$A = \{2,4,6\}$.

Il y a équiprobabilité, A est réalisé par 3 issues et l'univers en comporte 6 donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6}.$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \tfrac{1}{2}.}$$

2. On lance deux dés bien équilibrés et on effectue la somme des points portés sur les faces supérieures. Quelle est la probabilité d'obtenir 8 ?

Modélisation de l'expérience aléatoire.

Ω est formé de tous les couples d 'entiers entre 1 et 6 correspondant aux résultats affichés sur les deux faces. L'univers est muni de l'équiprobabilité : chaque couple de nombres a la même probabilité d'être obtenu qu'un autre.

Notons B : « obtenir une somme égalant 8 ».

Calculons $\mathbb{P}(B)$.

Nous devons trouver toutes les issues correspondant à l'événement B. Pour cela nous allons représenter toutes les sommes possibles sous forme d'un tableau double-entrée.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Il y a équiprobabilité B est réalisé par 5 issues, l'univers en comporte 36 donc

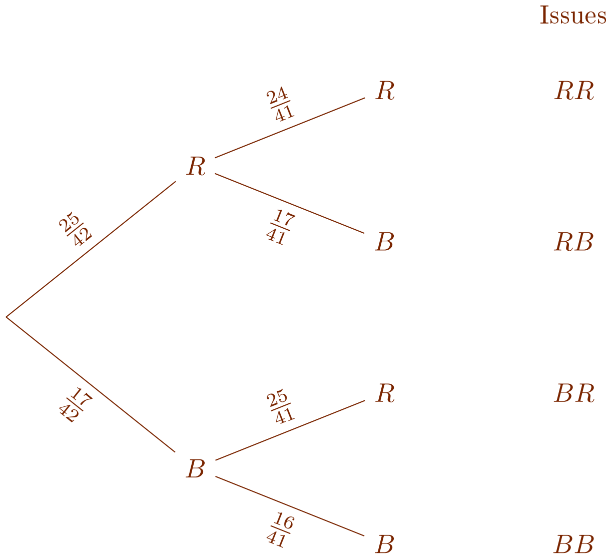
$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \tfrac{5}{36}.}$$

3. On considère un sac contenant 25 jetons rouges et 17 jetons bleus indiscernables au toucher. On tire deux jetons l'un après l'autre, sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir deux jetons de même couleur ?

Modélisation de l'expérience aléatoire.

Ω est formé de tous les couples, obtenus après les deux tirages, de couleurs rouges et bleus. $\Omega = \{RR, RB, BR, BB\}$. La loi de probabilité n'est pas évidente.

Pour calculer les probabilités nous allons utiliser un arbre pondéré. L'expérience est formée de deux épreuves à deux issues (tirer un jeton) donc l'arbre aura deux niveaux.



Notons E : « obtenir deux jetons de même couleur ».

Calculons $\mathbb{P}(E)$.

$E = \{RR, BB\}$.
Donc

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(RR) + \mathbb{P}(BB)$$

Nous en déduisons d'après le principe multiplicatif (formule des probabilités composées) :

$$\mathbb{P}(E) = \frac{25}{42} \times \frac{24}{41} + \frac{17}{42} \times \frac{16}{41}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(E) = \frac{436}{861}.}$$

Exercice 2.

Louise affirme que si on augmente la longueur du côté d'un carré de 100 % alors son aire augmente de 200 %.

Tessa n'est pas d'accord avec elle et affirme que l'aire sera doublée.

Eva soutient, quant à elle, que l'aire augmentera de 300 %.

Qui a raison ? Justifier la réponse.

Déterminons le taux d'évolution t_c de l'aire lorsque son côté augmente de 100 %.

Il s'agit de passer par les coefficients multiplicateurs pour simplifier les calculs.
Notons c la longueur du côté du carré initial et $\mathscr{A}_i$ son aire.
Une augmentation de 100 % correspond à une multiplication par :

$$\begin{aligned} CM &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{100}{100} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Puisque c a été multiplié par 2 l'aire finale du carré (après agrandissement) est :

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_f &= (2c)^2 \\ &= 2^2c^2 \\ &= 4c^2 \\ &= 4\mathscr{A}_i \end{aligned}$$

Ainsi l'aire initiale a été multipliée par 4. Le taux d'évolution correspondant à ce coefficient multiplicateur est

$$\begin{aligned} t_c &= 100 \times (CM - 1) \\ &= 100 \times (4 - 3) \\ &= 300 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'aire du carré a augmenté de 300 \%.}}$$

Exercice 3.

On considère le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre.
- Ajouter 6.
- Multiplier par le nombre de départ.
- Ajouter 9.
- Afficher le résultat.

1. (a) Monter que si le nombre de départ est 5, le résultat affiché sera 64.

Déterminons la valeur retournée lorsque la valeur 5 est choisie.

Construisons le tableau d'état des variables de ce programme en notant x la valeur de départ choisie et r la variable qui contiendra le résultat souhaité.

Instructions	x	r
Choisir un nombre.	5	
Ajouter 6.	5	$5+6=11$
Multiplier par le nombre de départ.	5	$11\times 5=55$
Ajouter 9.	5	$55+9=64$
Afficher le résultat.		64

Lorsque 5 est choisi le programme renvoie 64.

(b) Quel nombre sera affiché si le nombre choisi au départ est 10 ?

Déterminons la valeur retournée lorsque la valeur 10 est choisie.

Instructions	x	r
Choisir un nombre.	10	
Ajouter 6.	10	$10+6=16$
Multiplier par le nombre de départ.	10	$16\times 10=160$
Ajouter 9.	10	$160+9=169$
Afficher le résultat.		169

Lorsque 10 est choisi le programme renvoie 169.

Un tableur a été utilisé pour mettre en œuvre ce programme de calcul. Une copie de l'écran est donnée ci-dessous.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	nombre de départ	-3	-2	-1	0	1	2	3
2	résultat	0	1	4	9	16	25	36

2. Une formule a été saisie dans la cellule B2 et recopiée ensuite vers la droite pour compléter la plage C2 : H2.
   Parmi les formules suivantes, laquelle a été saisie ?
   $\boxed{=\texttt{B1}+6*\texttt{B1}+9}$ $\boxed{=(\texttt{B1}+6)*(\texttt{B1}+9)}$ $\boxed{=(\texttt{B1}+6)*\texttt{B1}+9}$

   Déterminons la valeur retournée lorsque la valeur x est choisie.

Instructions	x	r
Choisir un nombre.	x	
Ajouter 6.	x	$x+6$
Multiplier par le nombre de départ.	x	$(x+6)\times x$
Ajouter 9.	x	$(x+6)x+9$
Afficher le résultat.		$(x+6)x+9$

   la formule choisie est $\boxed{=(\texttt{B1}+6)*\texttt{B1}+9}$.

3. En observant la copie d'écran ci-dessus, émettre une conjecture sur le résultat obtenu en fonction du nombre de départ choisi.

   Il semblerait que le nombre obtenu soit le carré de $x+3$ lorsque x est le nombre choisi.

4. Démontrer cette conjecture.

   Démontrons que $(x+3)^2=(x+6)x+9$.

   Développons, ordonnons et réduisons les deux expressions.
   D'une part

$$\begin{aligned}(x+3)^2&=x^2+2\times x\times 3+3^2\\&=x^2+6x+9\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}(x+6)x+9 &= x \times x + 6 \times x + 9 \\ &= x^2 + 6x + 9\end{aligned}$$

donc, par transitivité, nous avons bien

$$\boxed{(x+3)^2 = (x+6)x+9.}$$

Exercice 4.

Un producteur de légumes sème des carottes sur deux parcelles différentes.

Pour répondre aux demandes de l'industrie agroalimentaire, les carottes doivent respecter certains calibrages.

On s'intéresse tout particulièrement à la longueur des carottes.

Après récolte, le producteur prélève un échantillon sur chacune des deux parcelles. Les résultats des mesures des longueurs des carottes de ces échantillons sont regroupés ci-dessous :

Parcelle A (400 carottes)	**Parcelle B (500 carottes)**
premier quartile : 7 cm	premier quartile : 7 cm
troisième quartile : 12 cm	troisième quartile : 9 cm
médiane : 10 cm	médiane : 8,5 cm
moyenne : 9,5 cm	moyenne : 8,8 cm
étendue : 9 cm	étendue : 10 cm
minimum : 4,5 cm	minimum : 5 cm

Dans cet exercice, il s'agit de dire si chacune des affirmations est vraie ou fausse et de le justifier.

1. *Affirmation 1.* Au moins 75 % des carottes de l'échantillon prélevé sur la parcelle B mesurent moins de 10 cm.

   Pour la parcelle B, $Q_3 = 9$ cm donc au moins 75 % des carottes mesurent moins de 9 cm donc

   $$\boxed{\text{l'affirmation 1 est vraie.}}$$

2. *Affirmation 2.* La plus grande carotte de l'échantillon prélevé sur la parcelle A mesure 14 cm.

   Sur la parcelle A le minimum et $min = 4{,}5$ cm et l'étendue est $e = 9$ cm donc la taille maximale est $max = min + e = 13{,}5$ cm.

L'affirmation 2 est fausse.

Pour les deux affirmations suivantes, on considère que le producteur regroupe les échantillons des deux parcelles.

3. *Affirmation 3.* La longueur moyenne d'une carotte est 9,15 cm.

   Déterminons la longueur moyenne, $\overline{x}$, d'une carotte.

   Il s'agit de faire une moyenne de moyennes donc prudence. Il faut considérer que la parcelle A contient 400 carottes de 9,5 cm et la B 500 carottes de 8,8 cm.

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{400 \times 9{,}5 + 500 \times 8{,}8}{400 + 500} \\ &= \frac{82}{9} \\ &= 9{,}111\ldots\end{aligned}$$

L'affirmation 3 est fausse.

4. *Affirmation 4.* La valeur médiane des longueurs des carottes est 6,9 cm.

   Les premiers quartiles des deux échantillons étant de 7, nous pouvons affirmer que strictement moins de 25 % des carottes ont une taille inférieure à 6,9 cm. Par conséquent

l'affirmation 4 est fausse.

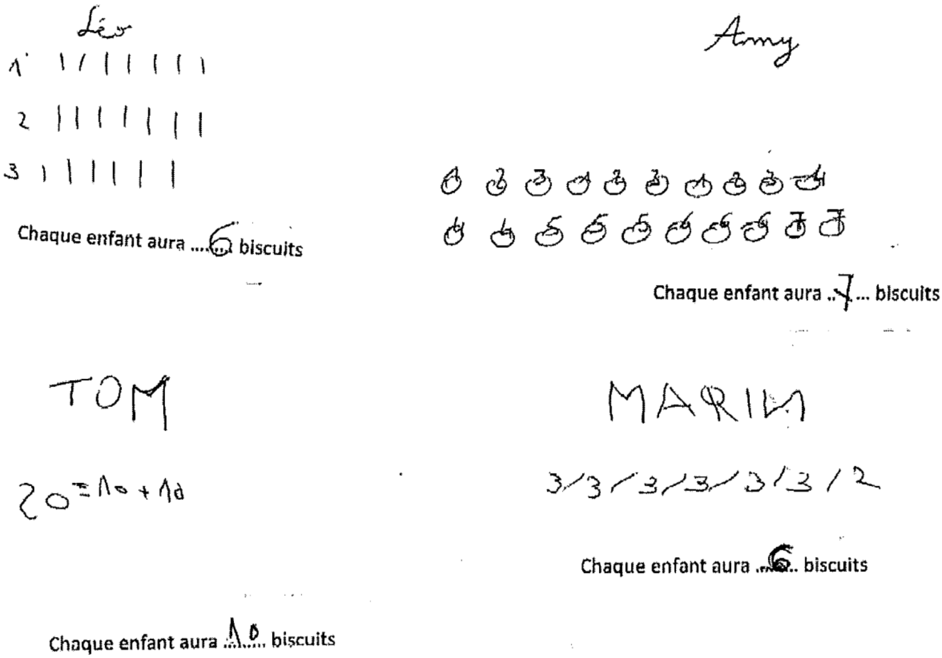
III Troisième partie (14 points).

Situation 1.

Dans une classe de CE1, l'exercice suivant a été proposé.

Une mère décide de partager équitablement entre ses trois enfants les 20 biscuits d'un paquet. Combien de biscuits va-t-elle donner à chaque enfant ?

1. Analyse du texte du problème.
   (a) Donner une difficulté que comporte la présentation de cet énoncé de problème et expliquer une conséquence possible.
   (b) Citer deux incidences sur la résolution du problème que le choix des nombres 3 et 20 va engendrer.
2. Voici les productions de quatre élèves :



Présenter dans un tableau :

- La démarche probable de chaque élève.
- Les éventuelles erreurs de chacun.
- Une origine possible de chacune de ces erreurs.
- Les connaissances mathématiques illustrées par ces démarches.

Situation 2.

Voici quatre problèmes extraits du manuel de mathématiques de CM1 de la collection LITCHI (Istra, Paris 2014).

Résoudre des problèmes

A5 Ingrid achète 32 bouteilles de soda pour la fête de son club de danse. Elle achète les bouteilles par packs de 6. Elle met 5 packs dans son chariot.

Combien de bouteilles doit-elle encore ajouter ?

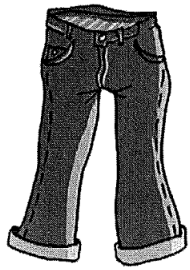
A6 Les stylos verts sont vendus par paquets de 4 ou bien à l'unité. Il en faut 29 pour donner un stylo à chaque élève du CM1.

- Combien de paquets faut-il acheter ?
- Combien de stylos à l'unité faut-il acheter pour compléter ?

B5 Pour la nouvelle année, le garagiste veut offrir un porte-clés à ses 78 clients. Les porte-clés sont vendus par lots de 8 ou bien à l'unité.

- Combien de lots doit-il acheter ?
- Combien de porte-clés à l'unité doit-il acheter pour compléter ?

B6 Julien possède deux boutiques de vêtements. Il commande 55 jeans pour l'un des magasins et 36 pour l'autre. Le livreur lui donne des paquets de 8 jeans et complète avec des pantalons à l'unité.



- Combien de paquets sont livrés ?
- Combien de jeans sont livrés à l'unité pour compléter ?

quarante-neuf 49

1. Précisez pour chaque problème s'il s'agit de la recherche de la valeur d'une part, de la recherche du nombre de part ou de la recherche du reste.

2. Créer un exercice proposant la recherche de la valeur d'une part en reprenant les données numériques du problème A6.

3. Quelle différence peut-on identifier entre les problèmes B5 et B6 ?

Situation 3.

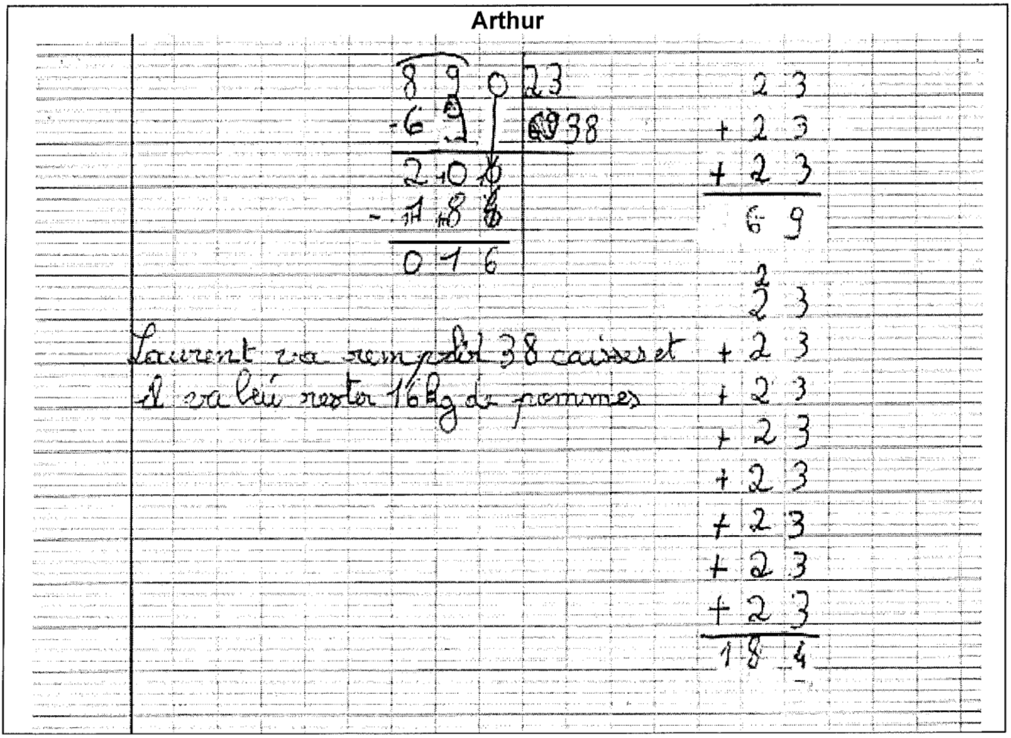
Le problème suivant est posé à des élèves d'une classe de CM2.

> Dans son verger de pommiers, Laurent a récolté 890 kg de pommes.
> Il les entrepose dans des caisses contenant chacune 23 kg de pommes.
> Combien de caisses Laurent va-t-il remplir ?
> Que lui restera-t-il ?

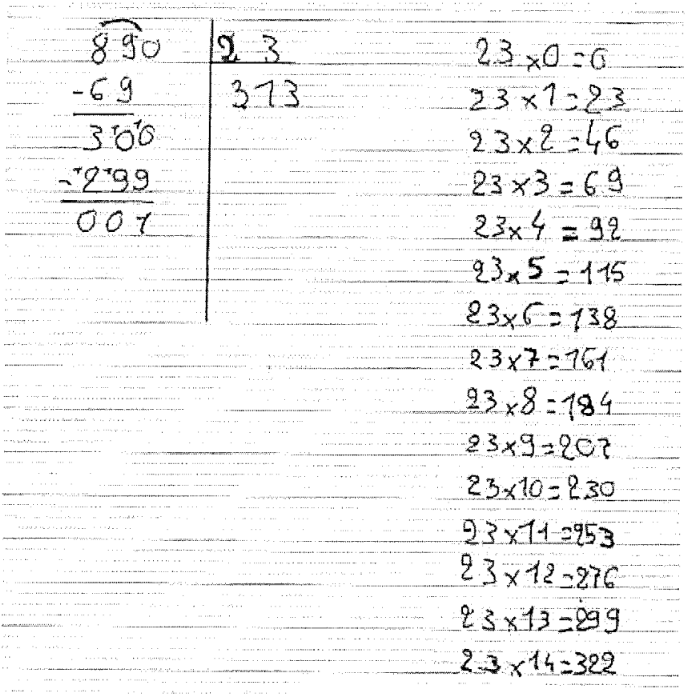
1. Quelle est la notion mathématique mise en jeu dans cet exercice ? Quelle est l'écriture mathématique de l'opération en ligne ?

2. En quoi les deux questions de l'énoncé du problème sont-elles importantes ?

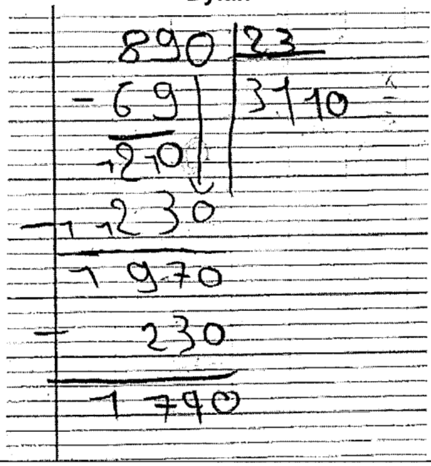
Voici les productions de trois élèves : Arthur, Océane et Dylan.



Océane



Dylan



3. Relever les réussites d'Arthur et celles d'Océane.

4. À partir de la démarche d'Arthur, proposer des étapes didactiques pour faire évoluer sa procédure.

5. Relever la ou les erreurs d'Océane, puis émettre des hypothèses sur son ou leur origine.

6. Citer deux erreurs de Dylan et, pour chacune donner des éléments d'analyse.