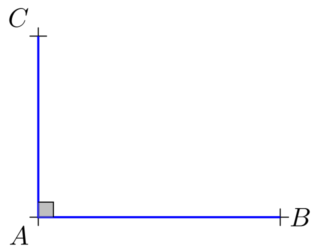
Épreuve de mathématiques CRPE 2016 groupe 3.

I Première partie. (13 points)

On donne trois points A, B,C tels que $AB = 8$ cm, $AC = 6$ cm ; les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.
(le dessin ci-contre n'est pas à l'échelle).



On place :

- un point D appartenant au segment $[AB]$ distinct de A et B ;
- le point E du segment $[BC]$ et de la perpendiculaire à ma droite (AB) passant par D ;
- le point F, intersection du segment $[AC]$ et de la perpendiculaire à la droite (AC) passant par E.

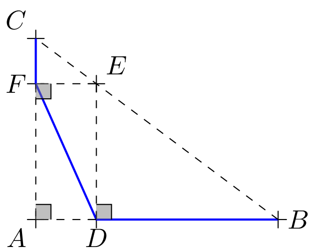


Figure 1

Le but du problème est de déterminer la position du point D pour laquelle la distance DF est minimale.

Partie A. Questions préliminaires.

Les deux résultats démontrés dans cette partie pourront être utilisés dans les parties suivantes.

1. Démontrer que $BC = 10$ cm.

2. Déterminer une mesure en degré de l'angle $\widehat{ABC}$ (on donnera le résultat arrondi à l'unité).

3. Démontrer que $AE = DF$.

Partie B. Étude analytique du problème.

1. Cas particulier : on suppose que $AD = 3$ cm.

   (a) Calculer BD puis en déduire DE.

   (b) Montrer que $DF = \sqrt{23,0625}$.

2. Cas général.

   Dans cette partie, on pose $AD = x$.

   (a) Quelles valeurs x peut-il prendre ?

   (b) Démontrer que $DE = 6 - 0,75x$.

   (c) En déduire que $DF^2 = 1,5625x^2 - 9x + 36$.

   (d) Vérifiez que l'on peut ainsi retrouver le résultat de la question **1.b**.

3. Recherche de la valeur de x pour laquelle DF est minimale.

   On admet qu'il existe une position du point D telle que DF est minimale, et donc une valeur de x pour laquelle DF^2 est minimal.

   Afin de déterminer la position du point D recherchée, on utilise un tableur

	A	B	C
1	x	DF²	
2	0	36,0000	
3	0,5	31,8906	
4	1	28,5625	
5	1,5	26,0156	
6	2	24,2500	
7	2,5	23,2656	
8	3	23,0625	
9	3,5	23,6406	
10	4	25,0000	
11	4,5	27,1406	
12	5	30,0625	
13	5,5	33,7656	
14	6	38,2500	
15	6,5	43,5156	
16	7	49,5625	
17	7,5	56,3906	
18	8	64,0000	
19			
20			

Tableau 1

(a) Une fois la colonne A et la cellule B1 remplies, indiquer quelle est, parmi les propositions suivantes, la formule rentrée en cellule B2 et ayant permis par recopie le remplissage de la colonne B.
— Proposition 1 : $= 1,5625 * 0^2 - 9 * 0 + 36$
— Proposition 2 : $= 1,5625 * \mathtt{A2} \wedge 2 - 9 * \mathtt{A2} + 36$
— Proposition 3 : $= 1,5625 * x \wedge 2 - 9 * x + 36$
— Proposition 4 : $= 1,5625 * \mathtt{A1} \wedge 2 - 9 * \mathtt{A1} + 36$

(b) Expliquer pourquoi l'utilisateur, après avoir observé les valeurs apparaissant dans la colonne B du tableau 1, a choisi de poursuivre la recherche avec les valeurs données dans la colonne D du tableau 2 ci-après.

(c) L'utilisateur affine encore les calculs, en remplissant les colonnes G et H du tableau. En déduire un encadrement d'amplitude 0, 02 de la valeur de x pour laquelle DF^2 est minimal.

D	E
x	DF²
2,5	23,2656
2,6	23,1625
2,7	23,0906
2,8	23,0500
2,9	23,0406
3	23,0625
3,1	23,1156
3,2	23,2000
3,3	23,3156
3,4	23,4625
3,5	23,6406

G	H
x	DF²
2,8	23,0500
2,81	23,0477
2,82	23,0456
2,83	23,0439
2,84	23,0425
2,85	23,0414
2,86	23,0406
2,87	23,0402
2,88	23,0400
2,89	23,0402
2,9	23,0406
2,91	23,0414
2,92	23,0425
2,93	23,0439
2,94	23,0456
2,95	23,0477
2,96	23,0500
2,97	23,0527
2,98	23,0556
2,99	23,0589
3	23,0625

Partie C. Résolution du problème par une méthode géométrique.

1. Construire une droite Δ et un point O n'appartenant pas à Δ. Placer le point H, intersection entre la droite Δ et la perpendiculaire à Δ passant par O, puis placer sur la droite Δ un point M distinct de H.
   Expliquer alors pourquoi $OH < OM$.

2. (a) Construire un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 8$ cm et $AC = 6$ cm.
   Utiliser la question précédente pour construire le point E sur $[BC]$ de telle sorte que la distance AE est minimale.
   Placer les points D et F de façon à retrouver la configuration de la figure 1, puis tracer le segment $[DF]$.

   (b) En exprimant l'aire du triangle ABC de deux façons différentes, déterminer la longueur AE et en déduire la longueur DF.

   (c) Calculer la distance AD et conclure quant au problème de départ.

II Deuxième partie. (13 points)

Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

Exercice 1.

(D'après Dimathème 2de, édition 2000, Didier)

On admet que la vitesse de la lumière dans le vide est égale à 3×10^8 m/s (mètres par seconde).

1. Une unité astronomique (1 UA) est égale à la distance moyenne Terre-Soleil ; elle vaut 150 millions de kilomètres.
   Calculer le temps, exprimé en minute et seconde, nécessaire à un signal lumineux émis par le Soleil pour parvenir à la Terre, en supposant qu'il parcourt 1 UA dans le vide.
2. Une année-lumière (1 AL) est la distance parcourue dans le vide par la lumière en une année julienne (c'est-à-dire $365,25$ jours).
   Calculer une valeur approchée, en kilomètre, d'une année-lumière.
3. Dans le système solaire, la planète la plus éloignée du Soleil est Neptune, et sa distance moyenne par rapport au Soleil est de $4,5$ milliards de kilomètres.
   (a) Exprimer cette distance en UA.
   (b) Si on réalisait une maquette du système solaire dans laquelle Neptune est placée à 1 m du Soleil faudrait-il placer la Terre ? On donnera le résultat arrondi au millimètre.

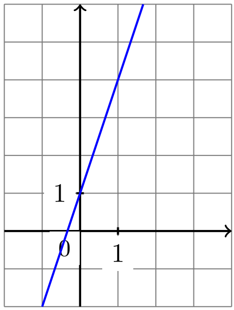
Exercice 2.

Dans cet exercice, quatre affirmations sont proposées.
Pour chacune, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, puis justifier la réponse.
Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point.
Une réponse incorrecte n'enlève pas de point.

1. Une bouteille d'eau pleine a une masse de 1 215 g.
   À moitié vide, elle a une masse de 840 g.
   Affirmation 1 : Cette bouteille vide pèse alors 465 g.

2. Dans une classe de 25 élèves, exactement 10 élèves sont partis en vacances à la montagne l'hiver, exactement 8 sont partis en vacances à la montagne l'été et exactement 5 élèves sont partis en vacances à la montagne l'hiver et l'été.
   Affirmation 2 : 12 élèves de cette classe ne sont pas partis en vacances (ni l'hiver, ni l'été).

3. **Affirmation 3** : La droite ci-dessous, dans un repère orthogonal, représente la fonction affine f définie par $f(x) = -3x + 1$.



4. **Affirmation 4** : Le PGCD de 2016 et 6102 est 2.

Exercice 3.

Un enseignant demande à ses élèves d'une classe de troisième d'appliquer le programme de calcul suivant :

- choisi un nombre a quelconque ;
- le multiplier par 4 ;
- ajouter 7 à ce produit ;
- mettre le tout au carré ;
- écrire le résultat.

1. (a) Vérifier que le nombre obtenu sera 225 si le nombre de départ est 2.
   (b) Déterminer le nombre obtenu, si le nombre de départ est $\frac{1}{2}$.
2. Montrer que pour le nombre de départ a, le nombre obtenu est $16a^2+56a+49$.
3. (a) Déterminer (s'ils existent) tous les nombres que l'on peut choisir au départ pour obtenir un résultat égal à 0.

(b) Déterminer (s'ils existent) tous les nombres que l'on peut choisir au départ pour obtenir un résultat égal à 49.

(c) Déterminer (s'ils existent) tous les nombres que l'on peut choisir au départ pour obtenir un résultat égal à -1.