Épreuve de mathématiques CRPE 2016 groupe 3.

I Première partie. (13 points)

Partie A. Questions préliminaires.

1. ABC est rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore

$$BC^2 = AC^2 + BA^2$$

Or $AC = 6$ et $AB = 8$ donc

$$BC^2 = 100$$

Comme BC est une longueur, c'est un nombre positif donc $BC = \sqrt{100} = 10$.

2. ABC est rectangle en A donc

$$\cos\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{AB}{BC}$$

Donc $\cos\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{4}{5} = 0{,}8$.
D'où une mesure en degré de l'angle arrondie au degré obtenue avec la calculatrice

$$\widehat{ABC} = 37°$$

3. Le quadrilatère $ADEF$ a trois angles droits et est donc un rectangle. Ses diagonales sont donc de même longueur

$$AE = DF$$

Partie B. Étude analytique du problème.

1. (a) $BD = AB - AD = 8 - 3 = 5$.

Configuration de Thalès : les points B, D, A d'une part et B, E, C d'autre part sont alignés dans cet ordre.
$(DE)//(AC)$ donc, d'après le théorème de Thalès

$$\frac{BD}{AB} = \frac{DE}{AC}$$

Nous en déduisons

$$DE = AC \times \frac{BD}{AB} = 6 \times \frac{5}{8} = \frac{15}{4} = 3{,}75$$

(b) $ADEF$ est un rectangle donc DEF est rectangle en E et, d'après le théorème de Pythagore

$$DE^2 + EF^2 = DF^2$$

Or $DE = \frac{15}{4}$ et $EF = AD = 3$ donc, DF étant une longueur donc positive

$$DF = \sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{\frac{369}{16}} = \sqrt{23{,}0625}$$

2. (a) $D \in [AB]$ et D est distinct de A et B donc $x \in]0;8[$.

(b) Configuration de Thalès : les points B, E, C d'une part et B, D, A d'autre part sont alignés dans cet ordre.
$(DE)//(AC)$ donc, d'après le théorème de Thalès

$$\frac{DE}{AC} = \frac{DB}{AB}$$

Or $AC = 6$, $DB = 8 - x$, $AB = 8$, donc

$$DE = AC \times \frac{DB}{AB} = 6 \times \frac{8-x}{8} = 6\frac{8}{8} - 6 \times \frac{1}{8}x = 6 - 0{,}75x$$

(c) DEF est rectangle en E, donc d'après le théorème de Pythagore

$$DF^2 = DE^2 + EF^2$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned} DF^2 &= (6 - 0{,}75x)^2 + x^2 \\ &= 6^2 - 2 \times 6 \times 0{,}75x + (0{,}75x)^2 + x^2 \\ &= 36 - 9x + 0{,}5625x^2 + x^2 \\ &= 1{,}5625x^2 - 9x + 36 \end{aligned}$$

(d) Si $AD = x = 3$ alors $DF^2 = 1{,}5625 \times 3^2 - 9 \times 3 + 36 = 23{,}0625$. Puis, DF étant une longueur donc positive, $DF = \sqrt{23{,}0625}$.

3. (a) Remarque la valeur $x = 0$ est impossible dans le cadre géométrique initialement étudié.

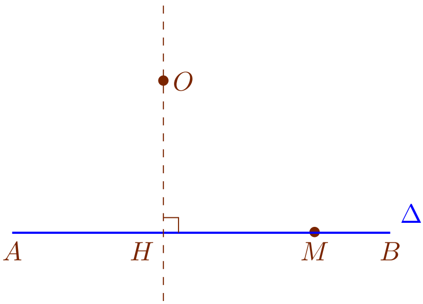
Il s'agit de la proposition 2 : $= 1{,}5625 * \mathtt{A2} \wedge 2 - 9 * \mathtt{A2} + 36$

(b) D'après le tableau 1 $23{,}2656 < DF^2_{\text{minimum}} < 23{,}6406$. Ce qui correspond à $2{,}5 \leq x \leq 3{,}5$.

Pour affiner la précision de l'encadrement il est possible d'essayer avec diverses valeurs de x en choisissant de d'incrémenter x de 0,1. On obtiendra ainsi un nouvel encadrement d'amplitude 0,2. Il est alors possible de recommencer la démarche en choisissant un pas plus fin 0,01.

(c) DF^2 est minimal pour une valeur de x dans l'intervalle $2{,}87 < x < 2{,}89$.

Partie C. Résolution du problème par une méthode géométrique.



1. $[OM]$ est l'hypoténuse du triangle OHM rectangle en H donc sa longueur est supérieure à celles des autres côtés.

Il est possible de justifier ceci en considérant le théorème de Pythagore qui permet d'affirmer

$$OM^2 = OH^2 + HM^2$$

Donc : $OM^2 > OH^2$.

Comme OM et OH sont des longueurs donc positives et que la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$: $OM > OH$.

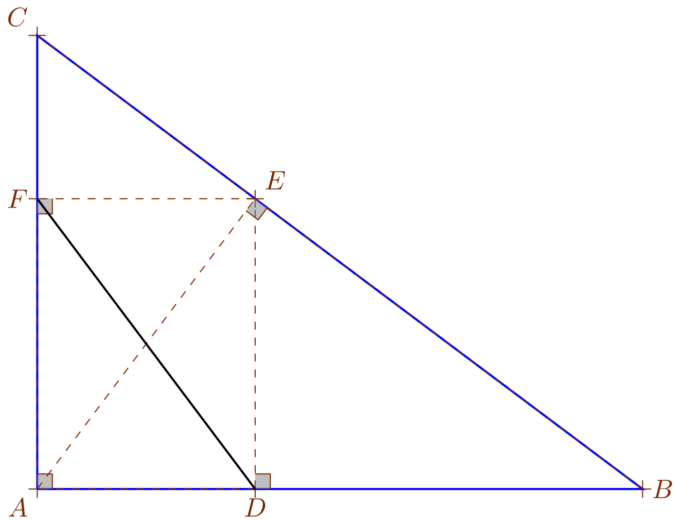


Figure 2

2. (a)

(b) Comme ABC est rectangle en A son aire est donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(ABC) &= \frac{1}{2} \times AB \times AC \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \\ &= 24\end{aligned}$$

Comme AE est la hauteur issue de A de ABC

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(ABC) &= \frac{1}{2} \times AE \times BC \\ &= \frac{1}{2} \times AE \times 10 \\ &= 5AE\end{aligned}$$

En égalant les deux expressions trouvées pour $\mathcal{A}(ABC)$

$$\begin{aligned}24 = 5AE &\Leftrightarrow \frac{24}{5} = \frac{5AE}{5} \\ &\Leftrightarrow AE = \frac{24}{5}\end{aligned}$$

Et comme $AE = DF$ finalement

$$DF = \frac{24}{5} = 4.8$$

(c) La somme des mesures en degrés des angles d'un triangle égale 180° donc

$$\widehat{DEB} = 180 - 90 - \widehat{ABC} = 90 - \widehat{ABC}$$

Comme $\widehat{AEB}$ est droit

$$\widehat{AED} = 90 - \widehat{DEB} = \widehat{ABC}$$

Comme $ADEF$ est un rectangle, par symétrie,

$$\widehat{AED} = \widehat{AFD}$$

et donc

$$\widehat{AED} = \widehat{ABC}$$

ADF étant rectangle en A

$$\frac{AD}{DF} = \sin\left(\widehat{ABC}\right)$$

Et enfin

$$\begin{aligned} AD &= DF \times \sin\left(\widehat{ABC}\right) \\ &= DF \times \frac{AC}{BC} \\ &= 4{,}8 \times \frac{6}{10} \\ &= 2{,}88 \end{aligned}$$

II Deuxième partie. (13 points)

Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

Exercice 1.

1.

$$\begin{aligned} v = \frac{d}{t} &\Leftrightarrow t = \frac{d}{v} \\ &\Leftrightarrow t = \frac{150.10^6}{3.10^8} \\ &\Leftrightarrow t = 5.10^{-1} \end{aligned}$$

Le signal met 30 secondes pour atteindre la Terre.

2. 365,25 jours $= 365{,}25 \times 24 \times 60 \times 60$ s $= 31\,557\,600$ s.
Donc la distance parcourue par la lumière en une année est

$$31557600 \times 3.10^8 = 946\,728.10^{10} \text{ m}$$

3. (a) $4{,}5.10^9$ km $= \frac{4{,}5.10^9}{150.10^6}$ UA $= 30$ UA

(b) $\frac{1}{30} \approx 0{,}033$ m

Exercice 2.

1. Notons x la masse de la bouteille vide et M celle de la masse d'eau dans la bouteille lorsqu'elle est pleine.
D'après l'énoncé

$$\begin{cases} x + \frac{M}{2} = 840 \\ x + M = 1215 \end{cases}$$

De la seconde égalité nous déduisons $M = 1215 - x$ et substituant dans la première égalité $x + \frac{1215-x}{2} = 840$. Cette dernière est une équation linéaire. Sa résolution $=$, en isolant l'inconnue x conduit à $x = 2\left(840 - \frac{1215}{2}\right) = 465$.
On vérifie que si la bouteille pèse 460 g cela convient.
L'affirmation est vraie.

2. Notons A l'ensemble des élèves partis en vacances à la montagne l'hiver, B l'ensemble des élèves partis en vacances à la montagne l'été.
L'ensemble des élèves partis en vacances à la montagne est donc $A \cup B$. Le nombre de tels élèves est donc

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B) = 10 + 8 - 5 = 13$$

L'ensemble des élèves qui ne sont pas partis, $\overline{A \cup B}$, comprend

$$\mathrm{Card}(\overline{A \cup B}) = 25 - \mathrm{Card}(A \cup B) = 25 - 13 = 12$$

L'affirmation est donc vraie.

3. Nous remarquons que le coefficient directeur de la droite dessinée est positif ce qui ne correspond pas à l'expression algébrique fournie.
   Il est aussi possible de tester une valeur particulière. L'image de 1 devrait être 4 ce qui ne correspond pas à l'expression algébrique.

4. $2016 = 2^5 \times 3^2$ et $6102 = 2 \times 3^3 \times 13$. Donc leur PGCD est $2 \times 3^2 = 18$.

   En utilisant l'algorithme d'Euclide.

$$6102 = 2016 \times 3 + 54$$
$$2016 = 54 \times 37 + \boxed{18}$$
$$54 = 18\ times 3$$

   Donc le PGCD de 2016 et 6102 est 18.

Exercice 3.

1. (a) Construisons le tableau de fonctionnement de l'algorithme.

Étapes	Variable a
Choisir a	2
Multiplier par 4	$2 \times 4 = 8$
Ajouter 7 à ce produit	$8 + 7 = 15$
Mettre le tout au carré	$15^2 = 225$

   (b) Construisons le tableau de fonctionnement de l'algorithme.

Étapes	Variable a
Choisir a	$\frac{1}{2}$
Multiplier par 4	$\frac{1}{2} \times 4 = 2$
Ajouter 7 à ce produit	$2 + 7 = 9$
Mettre le tout au carré	$9^2 = 81$

2. Construisons le tableau de fonctionnement de l'algorithme.

Étapes	Variable a
Choisir a	a
Multiplier par 4	$a \times 4 = 4a$
Ajouter 7 à ce produit	$4a + 7$
Mettre le tout au carré	$(4a + 7)^2$

Développons, réduisons puis ordonnons l'expression $(4a + 7)^2$.

$$\begin{aligned}(4a+7)^2 &= (4a)^2 + 2 \times 4a \times 7 + 7^2 \\ &= 16a^2 + 56a + 49\end{aligned}$$

3. (a) Autrement dit nous cherchons tous les les nombres réels x tels que $16x^2 + 56x + 49 = 0$.

   Utilisons une forme factorisée de ce trinôme

$$\begin{aligned}16x^2 + 56x + 49 = 0 &\Leftrightarrow (4x+7)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x + 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x + 7 - 7 = 0 - 7 \\ &\Leftrightarrow 4x = -7 \\ &\Leftrightarrow \frac{4x}{4} = \frac{-7}{4} \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{7}{4}\end{aligned}$$

   Pour que le résultat soit 0, $-\frac{7}{4}$ est le seul choix possible au départ.

   (b) De même que précédemment

$$\begin{aligned}16x^2 + 56x + 49 = 49 &\Leftrightarrow 16x^2 + 56x + 49 - 49 = 49 - 49 \\ &\Leftrightarrow 16x^2 + 56x = 0 \\ &\Leftrightarrow (16x + 56)x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 16x + 56 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 16x + 56 - 56 = 0 - 56 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 16x = -56 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \frac{16x}{16} = \frac{-56}{16}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{7}{2}$$

Pour que le résultat soit 49, $-\frac{7}{2}$ et 0 sont les seuls choix possibles au départ.

(c) L'équation $(4x + 7)^2 = -1$ n'admet pas de solution (réelle) puisque le carré d'un nombre réel est un nombre positif.