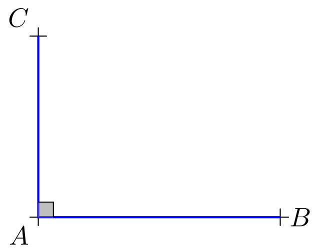
Épreuve de mathématiques CRPE 2016 groupe 3.

I Première partie. (13 points)

On donne trois points A, B,C tels que $AB = 8$ cm, $AC = 6$ cm ; les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.
(le dessin ci-contre n'est pas à l'échelle).



On place :

- un point D appartenant au segment $[AB]$ distinct de A et B ;
- le point E du segment $[BC]$ et de la perpendiculaire à ma droite (AB) passant par D ;
- le point F, intersection du segment $[AC]$ et de la perpendiculaire à la droite (AC) passant par E.

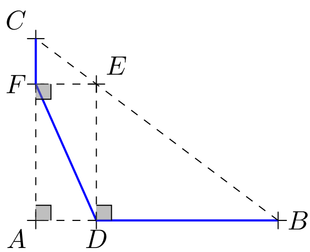


Figure 1

Le but du problème est de déterminer la position du point D pour laquelle la distance DF est minimale.

Partie A. Questions préliminaires.

Les deux résultats démontrés dans cette partie pourront être utilisés dans les parties suivantes.

1. Démontrer que $BC = 10$ cm.

ABC est rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore

$$BC^2 = AC^2 + BA^2$$

Or $AC = 6$ et $AB = 8$ donc

$$BC^2 = 100$$

Comme BC est une longueur, c'est un nombre positif donc $BC = \sqrt{100} = 10$.

2. Déterminer une mesure en degré de l'angle $\widehat{ABC}$ (on donnera le résultat arrondi à l'unité).

   ABC est rectangle en A donc

$$\cos\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{AB}{BC}$$

   Donc $\cos\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{4}{5} = 0{,}8$.

   D'où une mesure en degré de l'angle arrondie au degré obtenue avec la calculatrice

$$\widehat{ABC} = 37°$$

3. Démontrer que $AE = DF$.

   Le quadrilatère $ADEF$ a trois angles droits et est donc un rectangle. Ses diagonales sont donc de même longueur

$$AE = DF$$

Partie B. Étude analytique du problème.

1. Cas particulier : on suppose que $AD = 3$ cm.

   (a) Calculer BD puis en déduire DE.

   $BD = AB - AD = 8 - 3 = 5$.

   Configuration de Thalès : les points B, D, A d'une part et B, E, C d'autre part sont alignés dans cet ordre.
   $(DE)//(AC)$ donc, d'après le théorème de Thalès

$$\frac{BD}{AB} = \frac{DE}{AC}$$

   Nous en déduisons

$$DE = AC \times \frac{BD}{AB} = 6 \times \frac{5}{8} = \frac{15}{4} = 3{,}75$$

(b) Montrer que $DF = \sqrt{23{,}0625}$.

$ADEF$ est un rectangle donc DEF est rectangle en E et, d'après le théorème de Pythagore

$$DE^2 + EF^2 = DF^2$$

Or $DE = \frac{15}{4}$ et $EF = AD = 3$ donc, DF étant une longueur donc positive

$$DF = \sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{\frac{369}{16}} = \sqrt{23{,}0625}$$

2. Cas général.

Dans cette partie, on pose $AD = x$.

(a) Quelles valeurs x peut-il prendre ?

$D \in [AB]$ et D est distinct de A et B donc $x \in]0;8[$.

(b) Démontrer que $DE = 6 - 0{,}75x$.

Configuration de Thalès : les points B, E, C d'une part et B, D, A d'autre part sont alignés dans cet ordre.
$(DE)//(AC)$ donc, d'après le théorème de Thalès

$$\frac{DE}{AC} = \frac{DB}{AB}$$

Or $AC = 6$, $DB = 8 - x$, $AB = 8$, donc

$$DE = AC \times \frac{DB}{AB} = 6 \times \frac{8-x}{8} = 6\frac{8}{8} - 6 \times \frac{1}{8}x = 6 - 0{,}75x$$

(c) En déduire que $DF^2 = 1{,}5625x^2 - 9x + 36$.

DEF est rectangle en E, donc d'après le théorème de Pythagore

$$DF^2 = DE^2 + EF^2$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned} DF^2 &= (6 - 0{,}75x)^2 + x^2 \\ &= 6^2 - 2 \times 6 \times 0{,}75x + (0{,}75x)^2 + x^2 \\ &= 36 - 9x + 0{,}5625x^2 + x^2 \\ &= 1{,}5625x^2 - 9x + 36 \end{aligned}$$

(d) Vérifiez que l'on peut ainsi retrouver le résultat de la question **1.b.**

Si $AD = x = 3$ alors $DF^2 = 1{,}5625 \times 3^2 - 9 \times 3 + 36 = 23{,}0625$. Puis, DF étant une longueur donc positive, $DF = \sqrt{23{,}0625}$.

3. Recherche de la valeur de x pour laquelle DF est minimale.

On admet qu'il existe une position du point D telle que DF est minimale, et donc une valeur de x pour laquelle DF^2 est minimal.

Afin de déterminer la position du point D recherchée, on utilise un tableur

	A	B	C
1	x	DF²	
2	0	36,0000	
3	0,5	31,8906	
4	1	28,5625	
5	1,5	26,0156	
6	2	24,2500	
7	2,5	23,2656	
8	3	23,0625	
9	3,5	23,6406	
10	4	25,0000	
11	4,5	27,1406	
12	5	30,0625	
13	5,5	33,7656	
14	6	38,2500	
15	6,5	43,5156	
16	7	49,5625	
17	7,5	56,3906	
18	8	64,0000	
19			
20			

Tableau 1

(a) Une fois la colonne `A` et la cellule `B1` remplies, indiquer quelle est, parmi les propositions suivantes, la formule rentrée en cellule `B2` et ayant permis par recopie le remplissage de la colonne `B`.

— Proposition 1 : $= 1{,}5625 * 0^2 - 9 * 0 + 36$

— Proposition 2 : $= 1{,}5625 * \mathtt{A2} \wedge 2 - 9 * \mathtt{A2} + 36$

— Proposition 3 : $= 1{,}5625 * x \wedge 2 - 9 * x + 36$

— Proposition 4 : $= 1{,}5625 * \mathtt{A1} \wedge 2 - 9 * \mathtt{A1} + 36$

Remarque la valeur $x = 0$ est impossible dans le cadre géométrique initialement étudié.

Il s'agit de la proposition 2 : $= 1{,}5625 * \mathtt{A2} \wedge 2 - 9 * \mathtt{A2} + 36$

(b) Expliquer pourquoi l'utilisateur, après avoir observé les valeurs apparaissant dans la colonne `B` du tableau 1, a choisi de poursuivre la recherche avec les valeurs données dans la colonne `D` du tableau 2 ci-après.

D'après le tableau 1 $23{,}2656 < DF^2_{\text{minimum}} < 23{,}6406$. Ce qui correspond à $2{,}5 \leq x \leq 3{,}5$.
Pour affiner la précision de l'encadrement il est possible d'essayer avec diverses valeurs de x en choisissant de d'incrémenter x de 0,1. On obtiendra ainsi un nouvel encadrement d'amplitude 0,2. Il est alors possible de recommencer la démarche en choisissant un pas plus fin 0,01.

(c) L'utilisateur affine encore les calculs, en remplissant les colonnes `G` et `H` du tableau. En déduire un encadrement d'amplitude 0,02 de la valeur de x pour laquelle DF^2 est minimal.

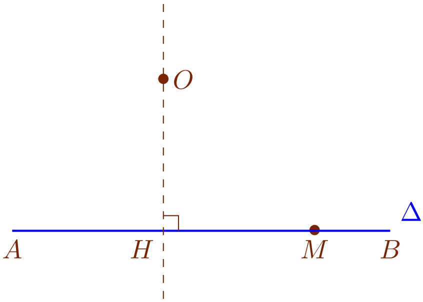
D	E	F	G	H
x	**DF²**		**x**	**DF²**
2,5	23,2656		2,8	23,0500
2,6	23,1625		2,81	23,0477
2,7	23,0906		2,82	23,0456
2,8	23,0500		2,83	23,0439
2,9	23,0406		2,84	23,0425
3	23,0625		2,85	23,0414
3,1	23,1156		2,86	23,0406
3,2	23,2000		2,87	23,0402
3,3	23,3156		2,88	23,0400
3,4	23,4625		2,89	23,0402
3,5	23,6406		2,9	23,0406
			2,91	23,0414
			2,92	23,0425
			2,93	23,0439
			2,94	23,0456
			2,95	23,0477
			2,96	23,0500
			2,97	23,0527
			2,98	23,0556
			2,99	23,0589
			3	23,0625

DF^2 est minimal pour une valeur de x dans l'intervalle $2{,}87 < x < 2{,}89$.

Partie C. Résolution du problème par une méthode géométrique.

1. Construire une droite Δ et un point O n'appartenant pas à Δ. Placer le point H, intersection entre la droite Δ et la perpendiculaire à Δ passant par O, puis placer sur la droite Δ un point M distinct de H.

Expliquer alors pourquoi $OH < OM$.



$[OM]$ est l'hypoténuse du triangle OHM rectangle en H donc sa longueur est supérieure à celles des autres côtés.

Il est possible de justifier ceci en considérant le théorème de Pythagore qui permet d'affirmer

$$OM^2 = OH^2 + HM^2$$

Donc : $OM^2 > OH^2$.

Comme OM et OH sont des longueurs donc positives et que la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$: $OM > OH$.

2. (a) Construire un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 8$ cm et $AC = 6$ cm.

   Utiliser la question précédente pour construire le point E sur $[BC]$ de telle sorte que la distance AE est minimale.

   Placer les points D et F de façon à retrouver la configuration de la figure 1, puis tracer le segment $[DF]$.

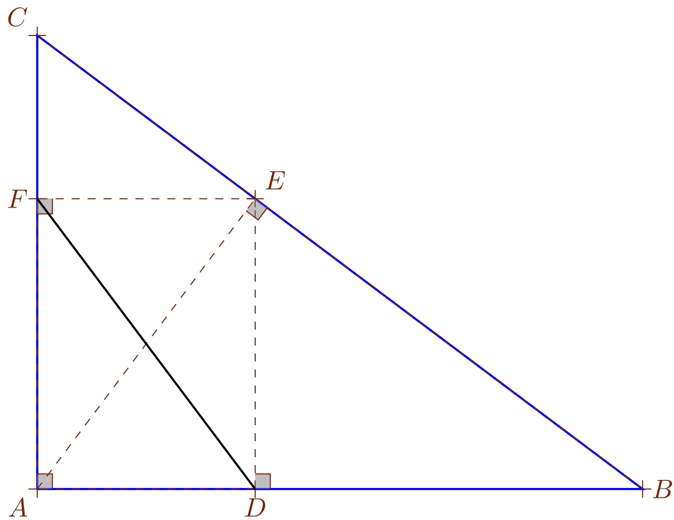


Figure 2

(b) En exprimant l'aire du triangle ABC de deux façons différentes, déterminer la longueur AE et en déduire la longueur DF.

Comme ABC est rectangle en A son aire est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(ABC) &= \frac{1}{2} \times AB \times AC \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \\ &= 24 \end{aligned}$$

Comme AE est la hauteur issue de A de ABC

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(ABC) &= \frac{1}{2} \times AE \times BC \\ &= \frac{1}{2} \times AE \times 10 \\ &= 5AE \end{aligned}$$

En égalant les deux expressions trouvées pour $\mathcal{A}(ABC)$

$$\begin{aligned}24 = 5AE &\Leftrightarrow \frac{24}{5} = \frac{5AE}{5}\\ &\Leftrightarrow AE = \frac{24}{5}\end{aligned}$$

Et comme $AE = DF$ finalement

$$DF = \frac{24}{5} = 4.8$$

(c) Calculer la distance AD et conclure quant au problème de départ.

La somme des mesures en degrés des angles d'un triangle égale 180° donc

$$\widehat{DEB} = 180 - 90 - \widehat{ABC} = 90 - \widehat{ABC}$$

Comme $\widehat{AEB}$ est droit

$$\widehat{AED} = 90 - \widehat{DEB} = \widehat{ABC}$$

Comme $ADEF$ est un rectangle, par symétrie,

$$\widehat{AED} = \widehat{AFD}$$

et donc

$$\widehat{AED} = \widehat{ABC}$$

ADF étant rectangle en A

$$\frac{AD}{DF} = \sin\left(\widehat{ABC}\right)$$

Et enfin

$$\begin{aligned}AD &= DF \times \sin\left(\widehat{ABC}\right)\\ &= DF \times \frac{AC}{BC}\\ &= 4{,}8 \times \frac{6}{10}\\ &= 2{,}88\end{aligned}$$

II Deuxième partie. (13 points)

Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

Exercice 1.

(D'après Dimathème 2de, édition 2000, Didier)

On admet que la vitesse de la lumière dans le vide est égale à 3×10^8 m/s (mètres par seconde).

1. Une unité astronomique (1 UA) est égale à la distance moyenne Terre-Soleil ; elle vaut 150 millions de kilomètres.
   Calculer le temps, exprimé en minute et seconde, nécessaire à un signal lumineux émis par le Soleil pour parvenir à la Terre, en supposant qu'il parcourt 1 UA dans le vide.

$$v = \frac{d}{t} \Leftrightarrow t = \frac{d}{v}$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{150.10^6}{3.10^8}$$
$$\Leftrightarrow t = 5.10^{-1}$$

   Le signal met 30 secondes pour atteindre la Terre.

2. Une année-lumière (1 AL) est la distance parcourue dans le vide par la lumière en une année julienne (c'est-à-dire 365,25 jours).
   Calculer une valeur approchée, en kilomètre, d'une année-lumière.

   365,25 jours $= 365{,}25 \times 24 \times 60 \times 60$ s $= 31\,557\,600$ s.
   Donc la distance parcourue par la lumière en une année est

$$31557600 \times 3.10^8 = 946\,728.10^{10} \text{ m}$$

3. Dans le système solaire, la planète la plus éloignée du Soleil est Neptune, et sa distance moyenne par rapport au Soleil est de 4,5 milliards de kilomètres.

   (a) Exprimer cette distance en UA.

   $4{,}5.10^9$ km $= \frac{4{,}5.10^9}{150.10^6}$ UA $= 30$ UA

   (b) Si on réalisait une maquette du système solaire dans laquelle Neptune est placée à 1 m du Soleil faudrait-il placer la Terre ? On donnera le résultat arrondi au millimètre.

   $\frac{1}{30} \approx 0{,}033$ m

Exercice 2.

Dans cet exercice, quatre affirmations sont proposées.
Pour chacune, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, puis justifier la réponse.
Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point.
Une réponse incorrecte n'enlève pas de point.

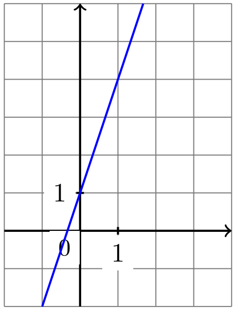
1. Une bouteille d'eau pleine a une masse de 1 215 g.
   À moitié vide, elle a une masse de 840 g.
   Affirmation 1 : Cette bouteille vide pèse alors 465 g.

   Notons x la masse de la bouteille vide et M celle de la masse d'eau dans la bouteille lorsqu'elle est pleine.
   D'après l'énoncé
   $$\begin{cases} x + \frac{M}{2} = 840 \\ x + M = 1215 \end{cases}$$
   De la seconde égalité nous déduisons $M = 1215 - x$ et substituant dans la première égalité $x + \frac{1215-x}{2} = 840$. Cette dernière est une équation linéaire. Sa résolution =, en isolant l'inconnue x conduit à $x = 2\left(840 - \frac{1215}{2}\right) = 465$.
   On vérifie que si la bouteille pèse 460 g cela convient.
   L'affirmation est vraie.

2. Dans une classe de 25 élèves, exactement 10 élèves sont partis en vacances à la montagne l'hiver, exactement 8 sont partis en vacances à la montagne l'été et exactement 5 élèves sont partis en vacances à la montagne l'hiver et l'été.
   Affirmation 2 : 12 élèves de cette classe ne sont pas partis en vacances (ni l'hiver, ni l'été).

   Notons A l'ensemble des élèves partis en vacances à la montagne l'hiver, B l'ensemble des élèves partis en vacances à la montagne l'été.
   L'ensemble des élèves partis en vacances à la montagne est donc $A \cup B$. Le nombre de tels élèves est donc
   $$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) = 10 + 8 - 5 = 13$$
   L'ensemble des élèves qui ne sont pas partis, $\overline{A \cup B}$, comprend
   $$\text{Card}(\overline{A \cup B}) = 25 - \text{Card}(A \cup B) = 25 - 13 = 12$$
   L'affirmation est donc vraie.

3. **Affirmation 3** : La droite ci-dessous, dans un repère orthogonal, représente la fonction affine f définie par $f(x) = -3x + 1$.



Nous remarquons que le coefficient directeur de la droite dessinée est positif ce qui ne correspond pas à l'expression algébrique fournie.
Il est aussi possible de tester une valeur particulière. L'image de 1 devrait être 4 ce qui ne correspond pas à l'expression algébrique.

4. **Affirmation 4** : Le PGCD de 2016 et 6102 est 2.

$2016 = 2^5 \times 3^2$ et $6102 = 2 \times 3^3 \times 13$. Donc leur PGCD est $2 \times 3^2 = 18$.

En utilisant l'algorithme d'Euclide.

$$6102 = 2016 \times 3 + 54$$
$$2016 = 54 \times 37 + \boxed{18}$$
$$54 = 18\ times 3$$

Donc le PGCD de 2016 et 6102 est 18.

Exercice 3.

Un enseignant demande à ses élèves d'une classe de troisième d'appliquer le programme de calcul suivant :

- choisi un nombre a quelconque ;
- le multiplier par 4 ;
- ajouter 7 à ce produit ;
- mettre le tout au carré ;
- écrire le résultat.

1. (a) Vérifier que le nombre obtenu sera 225 si le nombre de départ est 2.

   Construisons le tableau de fonctionnement de l'algorithme.

Étapes	Variable a
Choisir a	2
Multiplier par 4	$2 \times 4 = 8$
Ajouter 7 à ce produit	$8 + 7 = 15$
Mettre le tout au carré	$15^2 = 225$

   (b) Déterminer le nombre obtenu, si le nombre de départ est $\frac{1}{2}$.

   Construisons le tableau de fonctionnement de l'algorithme.

Étapes	Variable a
Choisir a	$\frac{1}{2}$
Multiplier par 4	$\frac{1}{2} \times 4 = 2$
Ajouter 7 à ce produit	$2 + 7 = 9$
Mettre le tout au carré	$9^2 = 81$

2. Montrer que pour le nombre de départ a, le nombre obtenu est $16a^2+56a+49$.

   Construisons le tableau de fonctionnement de l'algorithme.

Étapes	Variable a
Choisir a	a
Multiplier par 4	$a \times 4 = 4a$
Ajouter 7 à ce produit	$4a + 7$
Mettre le tout au carré	$(4a + 7)^2$

   Développons, réduisons puis ordonnons l'expression $(4a + 7)^2$.

$$\begin{aligned}(4a+7)^2 &= (4a)^2 + 2 \times 4a \times 7 + 7^2 \\ &= 16a^2 + 56a + 49\end{aligned}$$

3. (a) Déterminer (s'ils existent) tous les nombres que l'on peut choisir au départ pour obtenir un résultat égal à 0.

Autrement dit nous cherchons tous les les nombres réels x tels que $16x^2 + 56x + 49 = 0$.

Utilisons une forme factorisée de ce trinôme

$$\begin{aligned}
16x^2 + 56x + 49 = 0 &\Leftrightarrow (4x+7)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow 4x + 7 = 0 \\
&\Leftrightarrow 4x + 7 - 7 = 0 - 7 \\
&\Leftrightarrow 4x = -7 \\
&\Leftrightarrow \frac{4x}{4} = \frac{-7}{4} \\
&\Leftrightarrow x = -\frac{7}{4}
\end{aligned}$$

Pour que le résultat soit 0, $-\frac{7}{4}$ est le seul choix possible au départ.

(b) Déterminer (s'ils existent) tous les nombres que l'on peut choisir au départ pour obtenir un résultat égal à 49.

De même que précédemment

$$\begin{aligned}
16x^2 + 56x + 49 = 49 &\Leftrightarrow 16x^2 + 56x + 49 - 49 = 49 - 49 \\
&\Leftrightarrow 16x^2 + 56x = 0 \\
&\Leftrightarrow (16x + 56)x = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 16x + 56 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 16x + 56 - 56 = 0 - 56 \\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 16x = -56 \\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \frac{16x}{16} = \frac{-56}{16} \\
\Leftrightarrow x = -\frac{7}{2}
\end{aligned}$$

Pour que le résultat soit 49, $-\frac{7}{2}$ et 0 sont les seuls choix possibles au départ.

(c) Déterminer (s'ils existent) tous les nombres que l'on peut choisir au départ pour obtenir un résultat égal à -1.

L'équation $(4x+7)^2 = -1$ n'admet pas de solution (réelle) puisque le carré d'un nombre réel est un nombre positif.