Épreuve de mathématiques CRPE 2016 groupe 2.

I Première partie. (13 points)

Partie A : lectures graphiques.

1. La focale correspondant à un angle de 30° est 68 mm.
2. Une focale de 100 mm correspond à un angle de 21°.
3. Il faut choisir des angles de champs entre 11 et 37 degrés.

Partie B : prises de vues dans un théâtre.

1. (a)

$$\begin{aligned}\frac{D}{f} = \frac{L}{l} + 1 \Leftrightarrow \frac{D}{f} - 1 &= \frac{L}{l}\\ \Leftrightarrow l\left(\frac{D}{f} - 1\right) &= L\end{aligned}$$

Or $l = 36$ mm $= 0,036$, $D = 12$ m, $f = 35$ mm $= 0,035$ m donc $L = 0,036\left(\frac{12}{0,035} - 1\right) \approx 12,3$m en arrondissant au dixième de mètre près.

(b) Dire que la largeur de la scène photographiée soit au moins aussi grande que la largeur de la scène de théâtre c'est dire que : $L \geq 15$.
Cette inégalité équivaut successivement à

$$\begin{aligned}l\left(\frac{D}{f} - 1\right) &\geq 15\\ \frac{D}{f} - 1 &\geq \frac{15}{l}\\ \frac{D}{f} &\geq \frac{15}{l} + 1\\ D &\geq \left(\frac{15}{l} + 1\right) f\\ \frac{D}{\frac{15}{l} + 1} &\geq f\\ \frac{12}{\frac{15}{0,036} + 1} &\geq f\\ \frac{36}{1253} &\geq f\end{aligned}$$

Et comme la focale est une longueur donc positive : $f \in \left[0; \frac{36}{1253}\right]$.
Il doit donc utiliser une focale inférieure environ à $28,7$ mm.

2. Supposons une situation correspondant à :

$$\frac{D}{f} = \frac{L}{l} + 1$$

Si on double la distance de la scène de D_1 à $D_2 = 2D_1$ alors :

$$\frac{D_2}{f_2} = \frac{L}{l} + 1$$

Par transitivité :

$$\begin{aligned} \frac{D_2}{f_2} &= \frac{D_1}{f_1} \\ D_2\frac{f_1}{D_1} &= f_2 \\ 2D_1\frac{f_1}{D_1} & f_2 \\ 2f_1 &= f_2 \end{aligned}$$

L'affirmation est donc vraie.

Partie C : étude théorique.

1. (a)

$$\begin{cases} (AH) \perp (HK) \\ (KA') \perp (HK) \end{cases} \Rightarrow (AH)//(KA')$$

(b) Configuration de Thalès : les points H, C, K d'une part et A, C, A' d'autre part sont alignés dans cet ordre.
Comme de plus $(AH)//(KA')$, d'après le théorème de Thalès on a l'égalité métrique suivante

$$\frac{CH}{CK} = \frac{AH}{KA'}$$

(c) $CH = D - f$, $CK = f$, $AH = \frac{1}{2}L$, $A'K = \frac{1}{2}l$, donc l'égalité précédente s'écrit successivement

$$\begin{aligned}
\frac{D-f}{f} &= \frac{\frac{1}{2}L}{\frac{1}{2}l} \\
\frac{D}{f} - \frac{f}{f} &= \frac{L}{l} \\
\frac{D}{f} - 1 &= \frac{L}{l} \\
\frac{D}{f} &= \frac{L}{l} + 1
\end{aligned}$$

II Deuxième partie. (13 points)

Exercice 1.

1. (a) 12 archers ont gagné exactement 6 points.

   (b) Le nombre d'archers ayant gagné 3 points ou plus est $9 + 8 + 12 + 14 + 6 + 8 + 18 = 75$.

   (c)

Points	2	3	5	6	7	8	9	10
Archers	5	9	8	12	14	6	8	18
ECC	5	14	22	34	48	54	62	80

   - La série est ordonnée de façon croissante.
   - $\frac{Effectiftotal}{2} = \frac{80}{2} = 40$. La médiane est donc (série paire) la moyenne des quarantième et quarante-et-unième archers.
   - $Me = \frac{7+7}{2} = 7$.

   Le score médian des archers du club A est donc de 7 points.

2. (a) Avec la formule de la moyenne pondérée le score moyen du club A est

$$\overline{x}_A = \frac{5 \times 2 + 9 \times 3 + \cdots + 18 \times 10}{5 + 9 + \cdots + 18} \approx 6,8375$$

   Or, d'après l'énoncé, $\overline{x}_B = 7$, donc le score moyen du club B est supérieur à celui du club A.

   (b) Le score moyen des dix meilleurs archers lors de ce championnat du club A est $\overline{x}_{A+} = 10$ car 18 archers du club A ont obtenu un score de 10.
   Or, d'après l'énoncé, $\overline{x}_{B+} = 9,9$, donc le score moyen des dix meilleurs archers du club A est supérieur au score moyen des dix meilleurs archers du club B.

Exercice 2.

1. Il a tort la probabilité d'obtenir le 1 est la même que celle d'obtenir le 2 (ou les 3, 4 ou 5).

2. Pour modéliser l'expérience probabiliste distinguons les deux dés et représentons la situation par un tableau double entrée :

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$
2	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,6)$
3	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(3,6)$
4	$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$	$(4,5)$	$(4,6)$
5	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,3)$	$(5,4)$	$(5,5)$	$(5,6)$
6	$(6,1)$	$(6,2)$	$(6,3)$	$(6,4)$	$(6,5)$	$(6,6)$

Comme nous nous intéressons au nombre de 1 obtenus, introduisons la variable aléatoire, X, comptant le nombre 1 obtenus : $X \in \{0;1;2\}$. La loi de probabilité de X, d'après le précédent tableau est

Valeurs x prises par X	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

Avec cette modélisation « prendre la queue » est l'événement $(X = 2)$ et « prendre une oreille » est l'événement $(X \geqslant 1)$.
Or $P(X \geqslant 1) = 11 \times P(X = 2)$, donc il y a 11 fois plus de chance d'obtenir une oreille qu'une queue.

L'affirmation est donc fausse.

3. Notons Y le nombre de fois que l'on n'obtient pas de 6 lors de deux lancers successifs.

Ne pas obtenir au moins un 6 en lançant deux dés constitue le succès d'une épreuve de Bernoulli. La probabilité de ce succès est, d'après le tableau double entrée construit à la question précédente, $p = \frac{25}{36}$.
On recommence à l'identique et de façon indépendante $n = 2$ fois cette expérience. On réalise ainsi un schéma de Bernoulli de paramètres $p = \frac{25}{36}$ et $n = 2$.
Donc $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(2; \frac{25}{36}\right)$.

Donc

$$P(Y = 2) = \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} \binom{2}{2} \left(\frac{25}{36}\right)^2 \left(1 - \frac{25}{36}\right)^{2-2} = \frac{625}{1296}$$

Exercice 3.

1. Lorsqu'un télésiège comportant 4 sièges se déplace à 3 m/s alors l'espacement minimal entre deux cabines doit être de 18 m.

2. Les formules $= \$\mathtt{B3} * (4 + \mathtt{E\$2}/2)$ et $= \mathtt{B3} * (4 + 4/2)$ conviennent.

3. Dans l'affirmation proposée : $n = 4$, $V = 2,3$ et $D = 2400$.
   Or

$$\begin{aligned} D = 3600n\frac{V}{E} &\Leftrightarrow D \times E = 3600n\frac{V}{E} \times E \\ &\Leftrightarrow DE = 3600nV \\ &\Leftrightarrow \frac{DE}{D} = \frac{3600nV}{D} \\ &\Leftrightarrow E = \frac{3600nV}{D} \end{aligned}$$

   donc, avec les données de l'extrait

$$E = \frac{3600 \times 4 \times 2,3}{2400} = 13,8$$

   Ce résultat est exactement l'espacement minimal prévu pour un véhicule de 4 sièges de mouvant à 2,3 m/s.
   L'affirmation proposée est cohérente avec les données de cet exercice.

4. Utilisons la formule pour le débit.
   Si $V = 2$ alors

$$D = 3600 \times 4\frac{2}{12} = 2400$$

   Si $V = 3$ alors

$$D = 3600 \times 4\frac{3}{18} = 2400$$

   Ces deux situations conduisent au même débit.

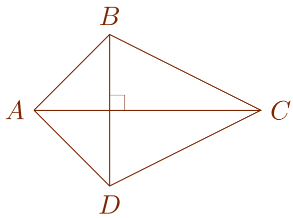
5. Comme $E = V\left(4 + \frac{n}{2}\right)$ en substituant E par cette expression dans l'égalité $D = 3600n\frac{V}{E}$ nous obtenons

$$D = 3600n\frac{V}{V\left(4 + \frac{n}{2}\right)} = \frac{3600nV}{\frac{V(8+n)}{2}} = \frac{7200n}{8+n}$$

   Cela confirme le résultat de la question précédente : le débit (avec un espacement minimal ne dépend pas de la vitesse choisie.

Exercice 4.

1. Même s'il s'agit d'un quadrilatère non croisé, le fait que les diagonales soient perpendiculaires n'implique pas qu'il s'agit d'un parallélogramme.



   Le quadrilatère que l'on nomme parfois un cerf-volant fourni un contre-exemple.
   L'affirmation est donc fausse.

2. Il s'agit de deux évolutions successives dont les coefficients multiplicateurs sont
$$CM_1 = 1 + \frac{t}{100} = 1 + \frac{-25}{100} = 0,75$$
   et
$$CM_2 = 1 + \frac{-20}{100} = 0,8$$
   Le coefficient multiplicateur correspondant à ces deux baisses est donc
$$CM_g = CM_1 \times CM_2 = 0,75 \times 0,8 = 0,6$$
   Le taux d'évolution correspondant est donc
$$t = CM_g - 1 = 0,6 - 1 = -0,4$$
   autrement dit il s'agit d'une baisse de 40 % du prix.
   L'affirmation est donc vraie.

3. Notons x le nombre de garçons.
   Le nombre total d'élèves de la classe est
$$\begin{aligned} N &= x + \frac{3}{4}x \\ &= \frac{7}{4}x \end{aligned}$$
   la proportion de garçons dans la classe est donc
$$\frac{x}{N} = \frac{x}{\frac{7}{4}x} = \frac{4}{7}$$

$\frac{4}{7} \neq \frac{1}{4}$.
L'affirmation est donc fausse.

4. D'après l'énoncé il existe des entiers q_1 et $_2$ tels que : $a = 7q_1 + 3$ et $b = 7q_2 + 4$.
Nous en déduisons que : $a+b = 7q_1+3+7q_2+4 = 7(q_1+q_2)+7 = 7(q_1+q_2+1)$.
Autrement dit $a + b$ est divisible par 7.
L'affirmation est vraie.