Épreuve de mathématiques CRPE 2016 groupe 2.

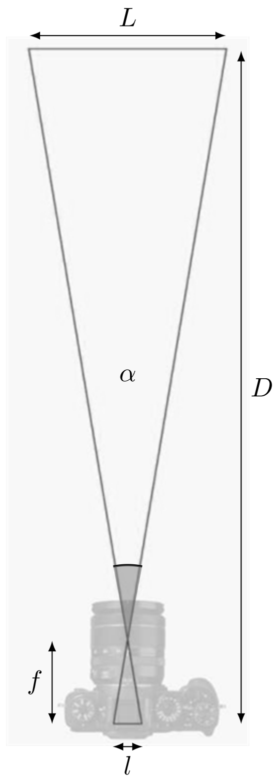
I Première partie. (13 points)

Ce problème porte sur l'utilisation d'un appareil photo numérique et étudie son fonctionnement.

L'appareil photo

Notations et vocabulaires utilisés dans tout le problème.

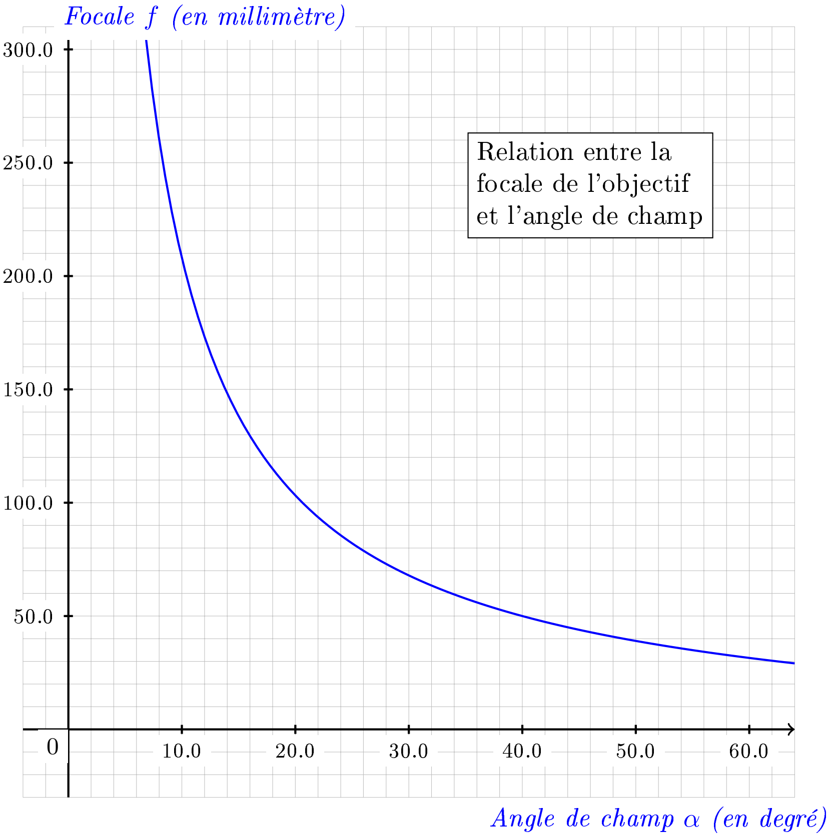
- L est la longueur de l scène photographiée ;
- α est l'**angle de champ** (angle sous lequel la scène est vue ;
- l est la largeur du capteur numérique situé à l'arrière de l'appareil photo ;
- D est la distance entre la scène photographiée et le capteur numérique ;
- f, qui sera appelée **focale** de l'objectif, est la distance entre le capteur et le centre optique de l'objectif. C'est une caractéristique essentielle d'un objectif. Elle s'exprime généralement en millimètre (mm).



Partie A : lectures graphiques.

Un photographe doit couvrir un spectacle théâtral.

Le graphique ci-après indique, pour son appareil, la relation entre la focale f de l'objectif et l'angle de champ α.



1. Du fond de la salle, il veut prendre une photo du spectacle avec un angle de champ $\alpha = 30°$.
   Déterminer à l'aide du graphique à quelle focale cela correspond.

   La focale correspondant à un angle de 30° est 68 mm.

2. À l'aide du graphique, estimer à quel angle de champ correspond une focale de 100 mm.

   Une focale de 100 mm correspond à un angle de 21°.

3. Le photographe dispose d'un objectif permettant d'obtenir une focale comprise entre 55 mm et 200 mm. Quels angles de champ peut-il obtenir avec cet objectif ?

   Il faut choisir des angles de champs entre 11 et 37 degrés.

Partie B : prises de vues dans un théâtre.

Formule fondamentale

La formule suivante, dans laquelle toutes les distances doivent être exprimées dans la **même unité**, est admise dans cette partie **B**. Elle sera démontrée dans la partie **C**.

$$\boxed{\frac{D}{f} = \frac{L}{l} + 1}$$

1. On considère que le capteur de l'appareil a pour largeur $l = 36$ mm et que le photographe est placé à $D = 12$ m de la scène du théâtre au centre de la salle.

   (a) En utilisant la formule précédente, déterminer la largeur de la scène photographiée L qui correspond à une focale de 35 mm. Donner la valeur arrondie au dixième de mètre.

   $$\frac{D}{f} = \frac{L}{l} + 1 \Leftrightarrow \frac{D}{f} - 1 = \frac{L}{l}$$
   $$\Leftrightarrow l\left(\frac{D}{f} - 1\right) = L$$

   Or $l = 36$ mm $= 0{,}036$, $D = 12$ m, $f = 35$ mm $= 0{,}035$ m donc $L = 0{,}036\left(\frac{12}{0{,}035} - 1\right) \approx 12{,}3$m en arrondissant au dixième de mètre près.

   (b) La scène du théâtre mesure 15 m de large. Quelles focales, en millimètre, le photographe, peut-il utiliser pour que la largeur de la scène photographiée soit au moins aussi grande que la largeur de la scène de théâtre ?

   Dire que la largeur de la scène photographiée soit au moins aussi grande que la largeur de la scène de théâtre c'est dire que : $L \geq 15$.

Cette inégalité équivaut successivement à

$$l\left(\frac{D}{f}-1\right)\geq 15$$
$$\frac{D}{f}-1\geq\frac{15}{l}$$
$$\frac{D}{f}\geq\frac{15}{l}+1$$
$$D\geq\left(\frac{15}{l}+1\right)f$$
$$\frac{D}{\frac{15}{l}+1}\geq f$$
$$\frac{12}{\frac{15}{0{,}036}+1}\geq f$$
$$\frac{36}{1253}\geq f$$

Et comme la focale est une longueur donc positive : $f\in\left[0;\frac{36}{1253}\right]$.
Il doit donc utiliser une focale inférieure environ à 28,7 mm.

2. L'affirmation « Si on est placé deux fois plus loin de la scène, il faut une focale deux fois plus longue pour photographier la même scène . » est-elle vraie ? Justifier la réponse.

Supposons une situation correspondant à :

$$\frac{D}{f}=\frac{L}{l}+1$$

Si on double la distance de la scène de D_1 à $D_2=2D_1$ alors :

$$\frac{D_2}{f_2}=\frac{L}{l}+1$$

Par transitivité :

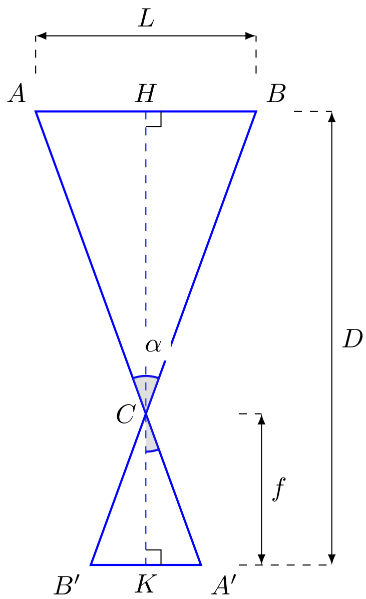
$$\frac{D_2}{f_2}=\frac{D_1}{f_1}$$
$$D_2\frac{f_1}{D_1}=f_2$$
$$2D_1\frac{f_1}{D_1}f_2$$
$$2f_1=f_2$$

L'affirmation est donc vraie.

Partie C : étude théorique.

Le but de cette partie est de démontrer la formule fondamentale utilisée dans la partie **B**.

On schématise la situation par la figure ci-contre dans laquelle les droites (AA'), (BB') et (HK) sont concourantes en C.



1. À l'aide des informations portées sur la figure :

(a) Justifier que les droites (AH) et $(A'K)$ sont parallèles.

$$\left\{\begin{array}{l}(AH)\perp(HK)\\(KA')\perp(HK)\end{array}\right. \Rightarrow (AH)//(KA')$$

(b) Justifier l'égalité : $\frac{CH}{CK}=\frac{AH}{A'K}$.

Configuration de Thalès : les points H, C, K d'une part et A, C, A' d'autre part sont alignés dans cet ordre.
Comme de plus $(AH)//(KA')$, d'après le théorème de Thalès on a l'égalité métrique suivante

$$\frac{CH}{CK}=\frac{AH}{KA'}$$

(c) En déduire la relation : $\frac{D}{f} = \frac{L}{l} + 1$.

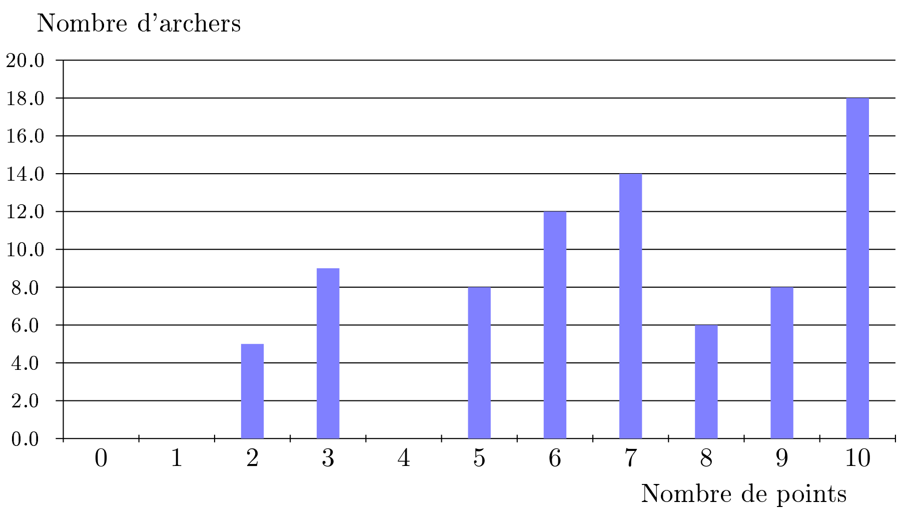
$CH = D - f$, $CK = f$, $AH = \frac{1}{2}L$, $A'K = \frac{1}{2}l$, donc l'égalité précédente s'écrit successivement

$$\frac{D-f}{f} = \frac{\frac{1}{2}L}{\frac{1}{2}l}$$
$$\frac{D}{f} - \frac{f}{f} = \frac{L}{l}$$
$$\frac{D}{f} - 1 = \frac{L}{l}$$
$$\frac{D}{f} = \frac{L}{l} + 1$$

II Deuxième partie. (13 points)

Exercice 1.

Quatre-vingts archers d'un club de tir à l'arc A ont participé à un championnat. Le nombre de points obtenus par chaque archer du club est donné par le diagramme ci-dessous.



1. Répondre à l'aide du diagramme précédent aux questions suivantes.

(a) Combien d'archers ont gagné exactement six points lors de ce championnat ?

12 archers ont gagné exactement 6 points.

(b) Combien d'archers ont gagné trois points ou plus lors de ce championnat ?

Le nombre d'archers ayant gagné 3 points ou plus est $5+9+8+12+14+6+8+18=80$.

(c) Quel est le score médian des archers du club A ?

Points	2	3	5	6	7	8	9	10
Archers	5	9	8	12	14	6	8	18
ECC	5	14	22	34	48	54	62	80

- La série est ordonnée de façon croissante.
- $\frac{Effectiftotal}{2}=\frac{80}{2}=40$. La médiane est donc (série paire) la moyenne des quarantième et quarante-et-unième archers.
- $Me=\frac{7+7}{2}=7$.

Le score médian des archers du club A est donc de 7 points.

2. Le club de tir à l'arc voisin B a aussi participé à ce championnat. Voici quelques données relatives aux résultats des archers de ce club :
— Le score moyen des archers lors du championnat est de 7 points.
— Le score moyen des dix meilleurs archers lors de ce championnat est 9,9 points.

(a) Comparer les résultats des deux clubs selon leurs scores moyens.

Avec la formule de la moyenne pondérée le score moyen du club A est

$$\overline{x}_A=\frac{5\times 2+9\times 3+\cdots+18\times 10}{5+9+\cdots+18}\approx 6{,}8375$$

Or, d'après l'énoncé, $\overline{x}_B=7$, donc le score moyen du club B est supérieur à celui du club A.

(b) Comparer les résultats des deux clubs selon les scores de leurs dix meilleurs archers.

Le score moyen des dix meilleurs archers lors de ce championnat du club A est $\overline{x}_{A+}=10$ car 18 archers du club A ont obtenu un score de 10.
Or, d'après l'énoncé, $\overline{x}_{B+}=9{,}9$, donc le score moyen des dix meilleurs archers du club A est supérieur au score moyen des dix meilleurs archers du club B.

Exercice 2.

D'après MATh.en.JEANS, 2011-2012, Collège Mermoz, MArly

Une règle du jeu :

Le jeu se joue avec **deux** dés (dés cubiques non truqués, avec des faces numérotées de 1 à 6).
But de la partie : obtenir un cochon composé d'un corps, de deux yeux, de deux oreilles, de quatre pattes et d'une queue.

Début de la partie : chaque joueur lance un dé. Celui qui obtient le score le plus élevé commence à jouer puis chaque joueur joue successivement, en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre.
Déroulement du jeu : lorsque c'est son tour, le joueur lance les *deux* dés (non truqués).

Si le joueur n'a pas encore pris le corps de son cochon, il doit obtenir un 6 au moins avec l'un des deux dés :
— s'il n'obtient pas de 6, il passe les dés au joueur suivant ;
— s'il obtient un 6 au moins, il prend le corps de son cochon et relance les dés.

Si le joueur a déjà pris le corps de son cochon, il doit obtenir un ou plusieurs 1 pour prendre les attributs du cochon :
— s'il n'obtient pas de 1, il passe les dés au joueur suivant ;
— s'il obtient un seul 1, il peut prendre un œil, une oreille ou une patte, puis il relance les dés ;
— s'il obtient deux 1, il peut prendre la queue du cochon ou deux autres attributs (oreilles, yeux, pattes) identiques ou non, puis il relance les dés.

Fin de la partie : le gagnant est le premier joueur à avoir complété son cochon.

1. Nicolas affirme : « *Si dans la règle on remplaçait la valeur* 1 *par la valeur* 2 *, on aurait deux fois moins de chance de gagner.* ».
A-t-il raison ? Justifier.

Il a tort la probabilité d'obtenir le 1 est la même que celle d'obtenir le 2 (ou les 3, 4 ou 5).

2. Sophie affirme : « *J'ai deux fois plus de chance de pouvoir prendre une oreille que la queue !* ».
   A-t-elle raison ? Justifier.

   Pour modéliser l'expérience probabiliste distinguons les deux dés et représentons la situation par un tableau double entrée :

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

   Comme nous nous intéressons au nombre de 1 obtenus, introduisons la variable aléatoire, X, comptant le nombre 1 obtenus : $X \in \{0; 1; 2\}$. La loi de probabilité de X, d'après le précédent tableau est

Valeurs x prises par X	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

   Avec cette modélisation « prendre la queue » est l'événement $(X = 2)$ et « prendre une oreille » est l'événement $(X = 1)$.
   Or $P(X = 1) = 10 \times P(X = 2)$, donc il y a 10 fois plus de chance d'obtenir une oreille qu'une queue.

   L'affirmation est donc fausse.

3. Quelles est la probabilité qu'un joueur ne puisse pas prendre le corps du cochon ni lors de son premier tour de jeu ni lors de son deuxième tour de jeu ?

   Notons Y le nombre de fois que l'on n'obtient pas de 6 lors de deux lancers successifs.

   Ne pas obtenir au moins un 6 en lançant deux dés constitue le succès d'une épreuve de Bernoulli. La probabilité de ce succès est, d'après le tableau double entrée construit à la question précédente, $p = \frac{25}{36}$.
   On recommence à l'identique et de façon indépendante $n = 2$ fois cette expérience. On réalise ainsi un schéma de Bernoulli de paramètres $p = \frac{25}{36}$ et $n = 2$.
   Donc $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(2; \frac{25}{36}\right)$.

Donc

$$P(Y=2)=\binom{n}{2}p^2(1-p)^{n-2}\binom{2}{2}\left(\frac{25}{36}\right)^2\left(1-\frac{25}{36}\right)^{2-2}=\frac{625}{1296}$$

Exercice 3.

Les télésièges sont équipés de véhicules fixés à un câble. Sur un télésiège donné, tous les véhicules ont le même nombre de sièges, généralement compris entre deux et six.

Exemple de véhicule à quatre sièges

Pour des raisons de sécurité, l'espacement minimal entre deux véhicules sur le câble dépend de la vitesse de déplacement des véhicules et du nombre de sièges par véhicule selon la formule ci-dessous, valable pour un nombre de sièges inférieur ou égale à six :

$$\boxed{E=V\left(4+\frac{n}{2}\right)}$$

où :

E désigne l'espacement minimal en mètre (m) ;

V désigne la vitesse des véhicules en mètre par seconde (m/s) ;

et n désigne le nombre de sièges par véhicule.

Une feuille de tableur a été crée en vue de calculer l'espacement minimal entre deux véhicules d'un télésiège :

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Nombre de sièges par véhicule					
2		**Vitesse en m/s**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
3		**2**	10	11	12	13	14	
4		**2,1**	10,5	11,55	12,6	13,65	14,7	
5		**2,2**	11	12,1	13,2	14,3	15,4	
6		**2,3**	11,5	12,65	13,8	14,95	16,1	
7		**2,4**	12	13,2	14,4	15,6	16,8	
8		**2,5**	12,5	13,75	15	16,25	17,5	
9		**2,6**	13	14,3	15,6	16,9	18,2	
10		**2,7**	13,5	14,85	16,2	17,55	18,9	
11		**2,8**	14	15,4	16,8	18,2	19,6	
12		**2,9**	14,5	15,95	17,4	18,85	20,3	
13		**3**	15	16,5	18	19,5	21	
14		**3,1**	15,5	17,05	18,6	20,15	21,7	
15		**3,2**	16	17,6	19,2	20,8	22,4	
16		**3,3**	16,5	18,15	19,8	21,45	23,1	
17		**3,4**	17	18,7	20,4	22,1	23,8	
18		**3,5**	17,5	19,25	21	22,75	24,5	
19		**3,6**	18	19,8	21,6	23,4	25,2	
20		**3,7**	18,5	20,35	22,2	24,05	25,9	
21		**3,8**	19	20,9	22,8	24,7	26,6	
22		**3,9**	19,5	21,45	23,4	25,35	27,3	
23		**4**	20	22	24	26	28	
24		**4,1**	20,5	22,55	24,6	26,65	28,7	
25		**4,2**	21	23,1	25,2	27,3	29,4	
26								
27								

Dans la suite de cet exercice on considère que l'espacement entre les véhicules est l'espacement minimal ainsi calculé.

1. La cellule E13 contient la valeur 18. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

   Lorsqu'un télésiège comportant 4 sièges se déplace à 3 m/s alors l'espacement minimal entre deux cabines doit être de 18 m.

2. Choisir une formule parmi celles données ci-dessous qui peut être saisie enE3 puis étirée vers le bas pour calculer l'ensemble des valeurs de la colonne E.

$= \$B3 * (4 + E\$2/2)$	$= 2 * (4 + 4/2)$	$= 12$
$= B3 * (4 + E2/2)$	$= B3 * (4 + 4/2)$	$= \$B\$3 * (4 + \$E\$2/2)$

   Les formules $= \$B3 * (4 + E\$2/2)$ et $= B3 * (4 + 4/2)$ conviennent.

3. Le débit D en nombre de personnes par heure est fourni par la formule :

$$D = 3\,600 n \frac{V}{E}$$

L'affirmation suivante est-elle cohérente avec les données de cet exercice ?

Les télésièges fabriqués en 2010 sont généralement équipés de véhicules à quatre places, avec une vitesse de ligne de 2,3 m/s *et peuvent, au maximum, atteindre un débit de* 2 400 *personnes par heure.*

Source : http://fr.wikipedia.org/wiki/Télésiège

Dans l'affirmation proposée : $n = 4$, $V = 2{,}3$ et $D = 2400$.
Or

$$\begin{aligned} D = 3600n\frac{V}{E} &\Leftrightarrow D \times E = 3600n\frac{V}{E} \times E \\ &\Leftrightarrow DE = 3600nV \\ &\Leftrightarrow \frac{DE}{D} = \frac{3600nV}{D} \\ &\Leftrightarrow E = \frac{3600nV}{D} \end{aligned}$$

donc, avec les données de l'extrait

$$E = \frac{3600 \times 4 \times 2{,}3}{2400} = 13{,}8$$

Ce résultat est exactement l'espacement minimal prévu pour un véhicule de 4 sièges de mouvant à 2,3 m/s.
L'affirmation proposée est cohérente avec les données de cet exercice.

4. Pour des véhicules à quatre sièges, une vitesse de 2 m/s fournira-t-elle un meilleur débit qu'une vitesse de 3 m/s ? (On se placera dans le cadre d'un espacement minimal dans chaque situation).

Utilisons la formule pour le débit.
Si $V = 2$ alors

$$D = 3600 \times 4\frac{2}{12} = 2400$$

Si $V = 3$ alors

$$D = 3600 \times 4\frac{3}{18} = 2400$$

Ces deux situations conduisent au même débit.

5. Montrer que, dans le cas où on choisit l'espacement minimal en fonction de la vitesse, le débit peut s'exprimer uniquement en fonction du nombre de sièges par véhicule.
Cela confirme-t-il ou non le résultat trouvé à la question **4.**.

Comme $E = V\left(4+\frac{n}{2}\right)$ en substituant E par cette expression dans l'égalité $D = 3600n\frac{V}{E}$ nous obtenons

$$D = 3600n\frac{V}{V\left(4+\frac{n}{2}\right)} = \frac{3600nV}{\frac{V(8+n)}{2}} = \frac{7200n}{8+n}$$

Cela confirme le résultat de la question précédente : le débit (avec un espacement minimal ne dépend pas de la vitesse choisie.

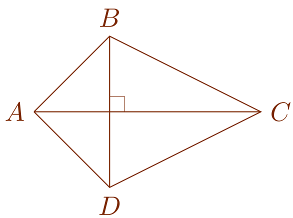
Exercice 4.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Une réponse fausse n'enlève pas de points, une réponse non justifiée ne rapporte aucune point.

1. $ABCD$ est un quadrilatère.
   Affirmation : si ses diagonales sont perpendiculaires, alors c'est un losange.

   Même s'il s'agit d'un quadrilatère non croisé, le fait que les diagonales soient perpendiculaires n'implique pas qu'il s'agit d'un parallélogramme.

   Le quadrilatère que l'on nomme parfois un cerf-volant fourni un contre-exemple.
   L'affirmation est donc fausse.

2. À l'occasion des soldes, le prix d'un article est réduit de 25 %.
   Avec sa carte de fidélité, Carine bénéficie de 20 % de réduction supplémentaire sur le prix réduit.
   Affirmation : Carine bénéficie d'une réduction égale à 40 % du prix initial de l'article.

   Il s'agit de deux évolutions successives dont les coefficients multiplicateurs sont
   $$CM_1 = 1 + \frac{t}{100} = 1 + \frac{-25}{100} = 0{,}75$$

et

$$CM_2 = 1 + \frac{-20}{100} = 0{,}8$$

Le coefficient multiplicateur correspondant à ces deux baisses est donc

$$CM_g = CM_1 \times CM_2 = 0{,}75 \times 0{,}8 = 0{,}6$$

Le taux d'évolution correspondant est donc

$$t = CM_g - 1 = 0{,}6 - 1 = -0{,}4$$

autrement dit il s'agit d'une baisse de 40 % du prix.
L'affirmation est donc vraie.

3. Dans une classe le nombre de filles est exactement égale à $\frac{3}{4}$ du nombre de garçons.
Affirmation : Exactement un quart des élèves de la classe sont des garçons.

Notons x le nombre de garçons.
Le nombre total d'élèves de la classe est

$$\begin{aligned} N &= x + \frac{3}{4}x \\ &= \frac{7}{4}x \end{aligned}$$

la proportion de garçons dans la classe est donc

$$\frac{x}{N} = \frac{x}{\frac{7}{4}x} = \frac{4}{7}$$

$\frac{4}{7} \neq \frac{1}{4}$.
L'affirmation est donc fausse.

4. Soient a et b deux nombres entiers.
On effectue la division euclidienne du nombre a par 7. On trouve comme reste 3.
On effectue la division euclidienne du nombre b par 7. On trouve comme reste 4.
Affirmation : le nombre $a + b$ est divisible par 7.

D'après l'énoncé il existe des entiers q_1 et $_2$ tels que : $a = 7q_1+3$ et $b = 7q_2+4$.
Nous en déduisons que : $a+b = 7q_1+3+7q_2+4 = 7(q_1+q_2)+7 = 7(q_1+q_2+1)$.
Autrement dit $a + b$ est divisible par 7.
L'affirmation est vraie.