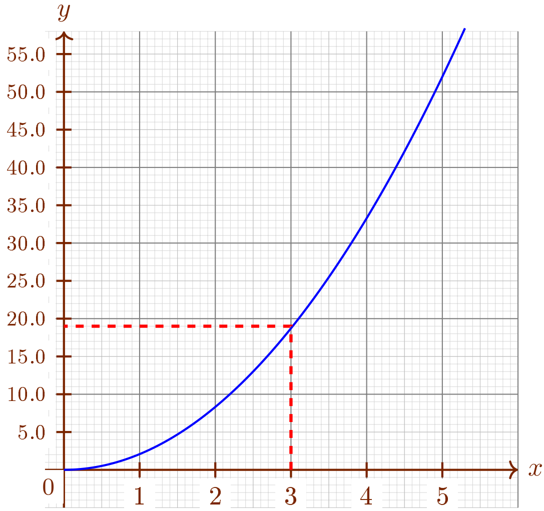
Épreuve de mathématiques CRPE 2016 groupe 1.

Lien vers le sujet seul : pdf.

I Première partie. (13 points)

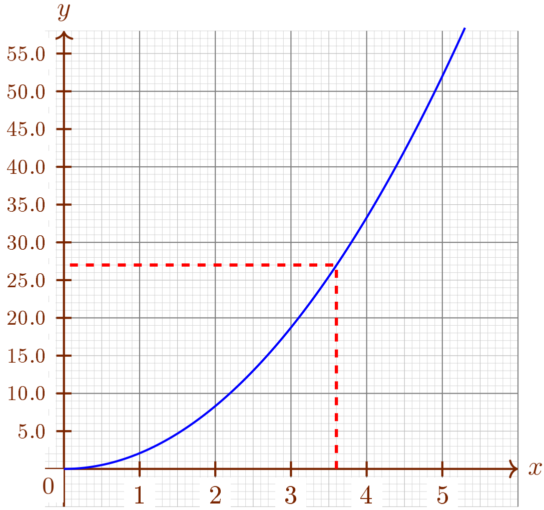
A. Volume de la piscine.

1. **Étude graphique.**



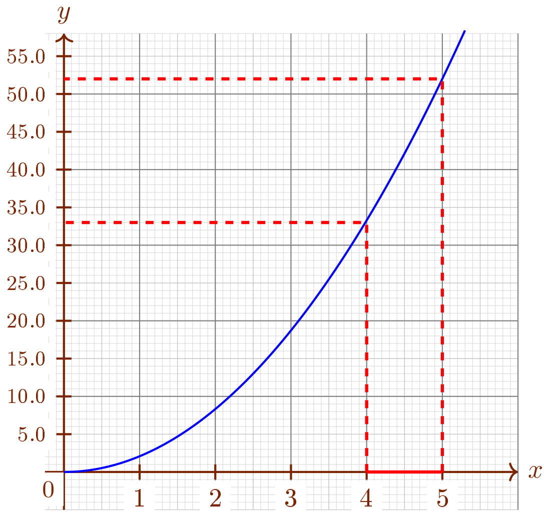
(a)

19 m^3.



(b)

3,6 m.



(c)

Le volume $\mathcal{V}$ vérifie alors :

$33 \leq \mathcal{V} \leq 52.$

2. **Étude algébrique.**

(a) Exprimons V en fonction de x.

La piscine est un prisme dont une base est le trapèze $ABCD$ rectangle en A et en D. Donc l'aire de cette base est

$$A_1 = \frac{(AB + CD) \times AD}{2}$$

Par hypothèse la longueur égale 1,6 fois la largeur de la piscine donc

$$A_1 = \frac{(1{,}10 + 1{,}50) \times 1{,}6x}{2}$$

Donc le volume de la piscine est :

$$\begin{aligned} V(x) &= AE \times A_1 \\ &= x \times \frac{(1{,}10 + 1{,}50) \times 1{,}6x}{2} \\ &= x\frac{2{,}60 \times 1{,}6x}{2} \\ &= 2{,}08x^2 \end{aligned}$$

Nous avons bien démontré que

$$\boxed{V(x) = 2{,}08x^2.}$$

(b) Nous cherchons x tel que $V(x) = 52$.

Résolvons l'équation $V(x) = 52$.

$$\begin{aligned} V(x) = 52 &\Leftrightarrow 2{,}08x^2 = 52 \\ &\Leftrightarrow \frac{2{,}08x^2}{2{,}08} = \frac{52}{2{,}08} \\ &\Leftrightarrow x^2 = 25 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 25 = 25 - 25 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 5^2 = 0 \end{aligned}$$

On reconnaît une identité remarquable :

$$\begin{aligned} V(x) = 52 &\Leftrightarrow (x-5)(x+5) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 5 = 0 \text{ ou } x + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 5 \text{ ou } x = -5 \end{aligned}$$

x désignant une longueur il ne peut être négatif. Nécessairement $x = 5$.

> La largeur de la piscine correspondant à un volume de 52 m^3 est 5 m.

B. Mise en eau.

1. (a) Calculons le volume d'eau.

En reprenant les raisonnements de la partie A, le volume d'eau est :

$$\begin{aligned} V_1 &= EA \times \frac{(E'F + H'G) \times EA}{2} \\ &= 5 \times \frac{[(1{,}10 - 0{,}1) + (1{,}50 - 0{,}1)] \times 8}{2} \\ &= 48 \end{aligned}$$

> Le volume d'eau est bien de 48 m^3.

(b) Calculons la durée de remplissage.

48 m^3 $= 48\,000$ dm^3 $= 48\,000$ L. Le débit étant de 18 L.min^{-1}, il faudra, en minutes :

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{48\,000}{18} \\ &= \frac{8000}{3} \\ &\approx 2\,667 \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} 2667 &= 44 \times 60 + 27 \\ 44 &= 1 \times 24 + 10 \end{aligned}$$

donc

le remplissage de la piscine durera 1 jour, 10 heures et 27 minutes.

2. (a) Calculons le volume d'eau perdu en une semaine.

   Le volume d'eau évaporée forme un parallélépipède rectangle dont le volume est :

$$\begin{aligned} V_2 &= 0{,}05 \times EA \times EH \\ &= 0{,}05 \times 5 \times 8 \\ &= 2 \end{aligned}$$

   2 m^3 d'eau ont été perdu en une semaine.

   (b) Déterminons la proportion d'eau perdue en une semaine.

   Proportion correspondante :

$$\begin{aligned} p &= \frac{2}{48} \\ &= \frac{1}{24} \\ &\approx 0{,}042 \end{aligned}$$

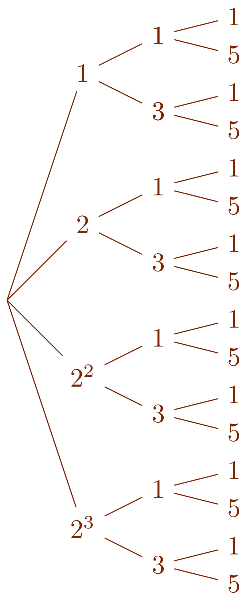
   Environ 4,2 % du volume initiale est perdu en une semaine.

C. Dallage du sol autour de la piscine.

1. Notons n la longueur en centimètres du côté d'une dalle.
   D'après le schéma il faut que n soit un diviseur commun à 500, 800 et 120, autrement dit est un diviseur de leur pgcd.
   Pour trouver tous les diviseurs nous allons utiliser leur décomposition en facteurs premiers.
   Or

$$\begin{cases} 500 = 2^2 \times 5^3 \\ 800 = 2^5 \times 5^2 \\ 120 = 2^3 \times 3 \times 5 \end{cases}$$

donc : pgcd(500,800,120) $= 2^2 \times 3 \times 5$.
Dessinons un arbre probabiliste qui recensera toutes les utilisations de chacun des fateurs possibles :



Chaque chemin de l'arbre correspond à un diviseur possible du pgcd.
Enfin les diviseurs sont écrits suivant l'ordre dans lequel on les obtient en lisant l'arbre de haut en bas :

$$n \in \{1;\ 5;\ 3;\ 15;\ 2;\ 10;\ 6;\ 30;\ 4;\ 20;\ 12;\ 60;\ 8;\ 40;\ 24;\ 120\}.$$

2. (a) Calculons le nombre de dalles nécessaires.

Pour un carré de côté 120 cm il utilisera $\frac{120}{20} \times \frac{120}{20} = 36$ dalles.
Pour un rectangle de dimensions 500 cm et 120 cm il utilisera $\frac{500}{20} \times \frac{120}{20} = 150$ dalles.
Pour un rectangle de dimensions 800 cm et 120 cm il utilisera $\frac{800}{20} \times \frac{120}{20} = 240$ dalles.
Il faudra donc utiliser $4 \times 36 + 2 \times 150 + 2 \times 240$ dalles.

Il devra utiliser 924 dalles.

J'ai fait le choix de calculer le nombre de dalles nécessaires pour chacun des rectangles dessinés sur la figure de l'énoncé. Nous aurions pu aussi bien calculer directement calculer le nombre de dalles nécessaires pour le grand rectangle de dimensions : $120 + 800 + 120$ et $120 + 500 + 120$.

(b) Déterminons le nombres dalles de 5 cm de côté nécessaire.

Pour recouvrir une dalle de 20 cm de côté il faut 16 dalles de côté 5 cm. Donc il faudrait 16 fois plus de dalles que de de dalles de 20 cm de côté.

Il faudrait donc 14 784 dalles de 5 cm de côté.

II Deuxième partie. (13 points)

Exercice 1.

1. (a) Démontrons que les deux programmes renvoient 72.

Nous pourrions faire un tableau d'état des variables. Cependant ici il s'agit d'un simple programme de calcul (pas de boucle ou de test conditionnel) il est donc pertinent de faire apparaître immédiatement l'expression algébrique correspondante.

Notons x la valeur choisie en entrée des deux programmes.

Programme 1.
Le résultat est $p_1(x) = (2x + 3)^2 - 9$. Donc $p_1(3) = 72$.

Programme 2.
Le résultat est $p_2(x) = 4x(x + 3)$. Donc $p_2(3) = 72$.

Les deux programmes renvoient 72 si l'on entre 3.

(b) Comme précédemment on obtient

$$p_1\left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{35}{4} \text{ et } p_2\left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{35}{4}.$$

2. Les résultats obtenus aux questions précédentes nous incitent à répondre par l'affirmative.

Démontrons que, quelque soit le nombre x, $p_1(x) = p_2(x)$.

Nous devons démontrer une propriété universelle (« quelque soit ») notre rédaction commence donc par :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Nous savons que p_1 et p_2 sont des expressions polynomiales. Pour démontrer qu'elles sont égales nous allons déterminer la forme développée, réduite et ordonnée de chacune d'entre elles et vérifier que nous obtenons la même chose.

$$\begin{aligned} p_1(x) &= (2x+3)^2 - 9 \\ &= (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 - 9 \\ &= 4x^2 + 12x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2(x) &= 4x(x+3) \\ &= 4x \times x + 4x \times 3 \\ &= 4x^2 + 12x \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p_1(x) = p_2(x)$.

$$\boxed{\text{Les deux programmes donnent le même résultat.}}$$

3. Résolvons l'équation $p_1(x) = 0$.

Puisque les deux programmes donnent le même résultat :

$$p_1(x) = 0 \Leftrightarrow p - 2(x) = 0$$

L'expression de p_2 est plus intéressante puisqu'elle est factorisée et permet de se ramener à une équation produit-nul.

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 4x(x+3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -3 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour obtenir 0 il faut choisir 0 ou } -3.}$$

Exercice 2.

Pour ce type d'exercice il n'y a pas de méthode qui marche à tout coup. Il faut soit deviner la réponse, soit la connaître (l'avoir déjà rencontrer) soit la conjecturer en faisant différents essais. Ces essais ne sont pas forcément une perte de temps : il peuvent fournir des contre-exemples.

Affirmation 1 : Il s'agit d'une propriété universelle qui est fausse. Pour démontrer qu'une propriété universelle est fausse il suffit d'exhiber un contre-exemple.

$$\begin{cases} a = 0{,}1 \\ b = 0{,}1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab = 0{,}01 < a \\ ab = 0{,}01 < b \end{cases}$$

$$\boxed{\text{L'affirmation est fausse.}}$$

Affirmation 2 : Pour démontrer qu'une propriété universelle est vraie la rédaction commence le plus souvent par :
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Pour montrer que c'est un multiple de 4 il faudrait factoriser. Nous remarquons une identité remarquable :

$$\begin{aligned}(n+1)^2 - (n-1)^2 &= [(n+1)-(n-1)]\,[(n+1)-(n-1)] \\ &= 2 \times 2n \\ &= 4n\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'affirmation est vraie.}}$$

Affirmation 3 : Trouvons un contre-exemple en essayant de petites valeur de n. Le plus petit entier naturel est 0.
Si $n = 0$ alors $(n-1)(n+1) - 1 = -2$. Or -2 ne peut être le carré d'un nombre (réel) car un carré est positif (ou nul), donc

$$\boxed{\text{L'affirmation est fausse.}}$$

Exercice 3.

1. Notons B l'événement « la boule tirée est bleue ».

   Modélisons l'expérience aléatoire puis calculons $\mathbb{P}(B)$.

   La situation peut être modélisée par une loi d'équiprobabilité (loi uniforme) sur l'univers composé de l'ensemble de toutes les boules.
   Il y a $3+4+5+7+6=25$ boules dans l'univers.
   L'événement B est réalisée par 7 issues.
   Donc :

   $$\boxed{\mathbb{P}(B)=\frac{7}{25}.}$$

2. Déterminons le nombre $n \in \mathbb{N}$ de boules à ajouter.

   Modélisons l'expérience. L'univers est constitué des $25+n$ boules. La loi de probabilité est l'équiprobabilité.
   L'événement B_n, « tirer une boule bleue », est réalisé par $7+n$ issues.
   Nous souhaitons donc que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_n) \geqslant 0{,}4 &\Leftrightarrow \frac{7+n}{25+n} \geqslant 0{,}4 \\
&\Leftrightarrow \frac{7+n}{25+n}\times(25+n) \geqslant 0{,}4\times(25+n) \quad \text{car } 25+n>0 \\
&\Leftrightarrow 7+n \geqslant 0{,}4\times 25+0{,}4\times n \\
&\Leftrightarrow 7+n \geqslant 10+0{,}4n \\
&\Leftrightarrow 7+n-0{,}4n \geqslant 10+0{,}4n-0{,}4n \\
&\Leftrightarrow 0{,}6n+7 \geqslant 10 \\
&\Leftrightarrow 0{,}6n+7-7 \geqslant 10-7 \\
&\Leftrightarrow 0{,}6n \geqslant 3 \\
&\Leftrightarrow \frac{0{,}6n}{0{,}6} \geqslant \frac{3}{0{,}6} \quad \text{car } 0{,}6>n \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 5
\end{aligned}$$

   $$\boxed{\text{Il faut ajouter au moins 5 boules bleues.}}$$

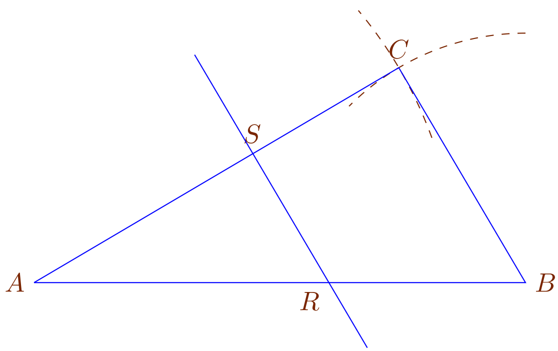
3. Déterminons le nombre $n \in \mathbb{N}$ de boules rouges à ajouter.

   En raisonnant comme précédemment :
   Notons E_n l'événement « obtenir une boule bleue sachant que n boules rouges ont été ajoutées. »

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_n) \leq 0{,}2 &\Leftrightarrow \frac{7}{25+n} \leqslant 0{,}2 \\ &\Leftrightarrow \frac{7}{25+n}\times(25+n) \leqslant 0{,}2\times(25+n) \quad \text{car } 25+n>0 \\ &\Leftrightarrow 7 \leqslant 0{,}2(25+n) \\ &\Leftrightarrow 7 \leqslant 5+0{,}2n \\ &\Leftrightarrow 7-5 \leqslant 5+0{,}2n-5 \\ &\Leftrightarrow 2 \leqslant 0{,}2n \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{0{,}2} \leqslant \frac{0{,}2n}{0{,}2} \quad \text{car } 0{,}2>0 \\ &\Leftrightarrow 10 \leqslant n\end{aligned}$$

   Il faut ajouter au moins 10 boules rouges.

Exercice 4.



1.

2. Puisque $(SR) \perp (AC)$ dire que $(CB) \parallel (RS)$ équivaut à dire que $(CB) \perp (AC)$. C'est cette dernière proposition que nous allons démontre.

   Démontrons que ABC est rectangle en C.

$$AB^2 = 65^2 = 4\,225 \quad \text{et} \quad AC^2 + BC^2 = 56^2 + 33^2 = 4\,225$$

donc, par transitivité,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

Par conséquent, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle C.
Ainsi (RS) et (BC) sont perpendiculaires à (AC), donc

$$\boxed{(RS) \parallel (BC).}$$

3. Déterminons AS.

   * Configuration de Thalès : les points A, S, C d'une part et A, R, B d'autre part sont alignés dans cet ordre.
   * (RS) et (BC) sont parallèles.

   Des points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès, que l'égalité suivante est vérifiée

   $$\frac{AR}{AB} = \frac{AS}{AC}.$$

   Cette égalité équivaut successivement à

   $$\frac{39}{65} = \frac{AS}{56}$$
   $$\frac{39}{65}\times 56 = \frac{AS}{56}\times 56$$
   $$\frac{168}{5} = AS$$

   Finalement :

   $$\boxed{AS = \tfrac{168}{5}.}$$

4. Déterminons une mesure de $\widehat{ARS}$.

   ARS est rectangle en S donc

$$\sin\left(\widehat{ARS}\right) = \frac{AS}{AR} = \frac{\frac{168}{5}}{39} = \frac{56}{65}$$

En utilisant arcsin avec la calculatrice (souvent noté $\sin^{-1}$) :

$$\boxed{\widehat{ARS} \approx 59°.}$$

III Troisième partie. (14 points)

Situation 1.

1. (a)
   (b)
2.

Situation 2.

1. (a)
   (b)
2. (a)
   (b)

Situation 3.