

# CRPE 2015 épreuve de mathématiques groupement académique 3.

## Première partie.

13 points

Un professeur veut préparer le matériel nécessaire pour mener une activité de découverte des formes géométriques. Il souhaite proposer aux élèves de fabriquer des figures comme ci- dessous, par découpage, collage puis coloriage. Il voudrait que chacune de ces figures, qui évoque une tête, ait un « œil » en forme de carré et un « œil » en forme de triangle équilatéral.

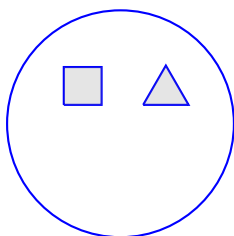


Figure 1

Il dispose de feuilles cartonnées dans lesquelles il découpera des carrés. Dans ces carrés, les élèves réaliseront les différents découpages requis.

### A. Étude de la situation concrète.

La documentation dont il dispose propose de découper deux paires d'yeux dans des carrés de 7 cm de côté selon le schéma approximatif suivant :

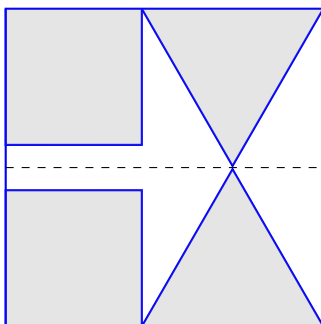


Figure 2

dans lequel les figures grisées sont des carrés de 3 cm de côté et des triangles équilatéraux de 4 cm de côté.

1. (a) Vérifier qu'il est possible de découper dans un carré de 7 cm de côté, deux paires d'yeux formées d'un carré de côté 3 cm et d'un triangle équilatéral de côté 4 cm, dans la disposition de la *Figure 2*.

*Dans cette question, on pourra utiliser le résultat suivant :*

*La mesure  $h$  de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté de mesure  $a$  est :*

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

- (b) Le professeur constate que les carrés et les triangles équilatéraux que les élèves auront à découper ont le même périmètre. Ont-ils la même aire?
2. Le professeur se demande s'il est possible de choisir d'autres dimensions pour les yeux de telle sorte qu'on puisse les découper dans des feuilles carrées de 7 cm de côté dans la disposition de la *Figure 2*, le carré et le triangle équilatéral ayant le même périmètre.

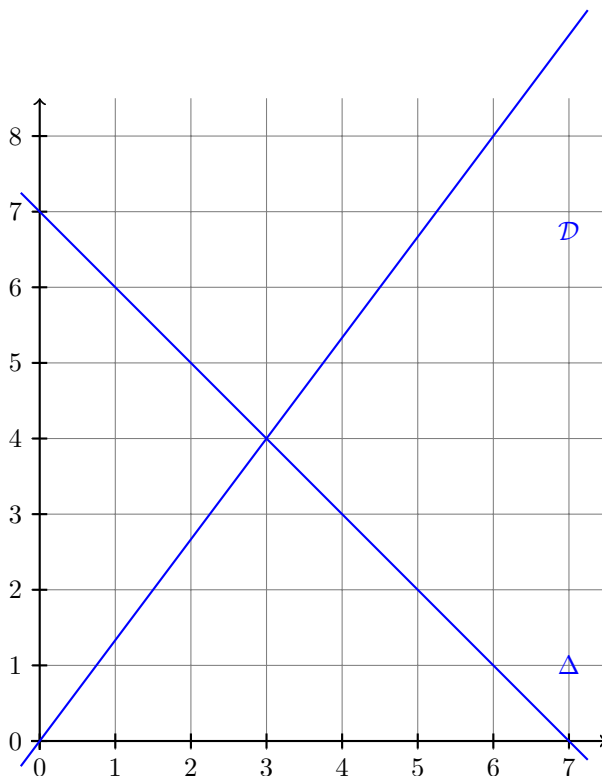
Pour cela, il appelle  $x$  le côté du carré grisé et  $y$  celui du triangle équilatéral grisé.

- (a) Expliquer pourquoi si  $x$  et  $y$  sont solutions du problème, alors ils vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x + y = 7 \\ 2x \leq 7 \\ y\sqrt{3} \leq 7 \end{cases}$$

- (b) Sur le graphique ci-dessous on a représenté les fonctions  $f$  et  $g$  définies par :

$$f(x) = \frac{4}{3}x \text{ et } g(x) = 7 - x$$



Expliquer comment cette représentation graphique peut permettre de répondre au problème que se pose le professeur.

- (c) Résoudre par le calcul le système  $\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x + y = 7 \end{cases}$  et en déduire la solution au problème.

3. Vingt-cinq élèves doivent participer à cette activité.

Le professeur dispose de feuilles cartonnées de format A3, de dimensions, en mm,  $420 \times 297$ . Il veut que chaque élève dispose d'un carré de 14 cm de côté, dans lequel il découpera un disque de rayon 7 cm pour faire la tête, et d'un rectangle de dimensions 7 cm sur 3,5 cm, dans lequel il découpera une paire d'yeux.

Quel nombre minimal de feuilles cartonnées de format A3 doit prévoir le professeur ?

**B. Démonstration de résultats mathématiques.**

1. Démontrer le résultat rappelé à la question A.1.a) :

La mesure  $h$  de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté de mesure  $a$  est :

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

2. Dans cette question, on considère un carré de côté  $x$  et un triangle équilatéral de côté  $y$  avec  $y = \frac{4}{3}x$ .
- (a) Vérifier que ce carré et ce triangle équilatéral ont le même périmètre.
- (b) Exprimer l'aire  $A_1$  du carré et l'aire  $A_2$  du triangle équilatéral en fonction de  $x$ .  
En déduire le rapport  $\frac{A_2}{A_1}$ .
- (c) Expliquer pourquoi les réponses aux questions (a) et (b) ci-dessus permettent de retrouver le résultat de la question A.1.b).

**Deuxième partie.****13 points**

**Cette partie est constituée de quatre exercices indépendants.**

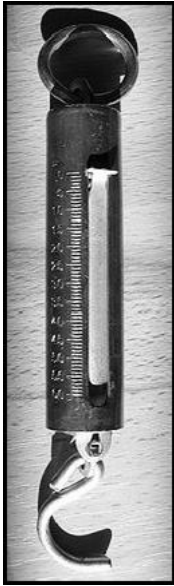
**Exercice 1.**

Un vététiste fait chaque semaine une sortie depuis son domicile situé à une altitude de 500 m, jusqu'à un col culminant à une altitude de 1 350 m. Il a le choix entre emprunter une route goudronnée de 27 km ou une piste en terre de 28 km.

1. La semaine dernière, il a décidé de prendre la route goudronnée. En partant à 8 h 10 min, il est arrivé au col à 9 h 40 min. À quelle vitesse moyenne a-t-il roulé ?
2. Cette semaine il a pris la piste en terre. Il constate qu'il a mis 1 h 45 min pour effectuer ce trajet. De quel pourcentage sa vitesse moyenne a-t-elle diminué ?

**Exercice 2.**

Pour colorer l'émail des objets qu'il fabrique, un artisan utilise des oxydes métalliques. Pour peser certains de ces oxydes métalliques, il utilise un peson à ressort constitué d'un ressort, d'une réglette et d'un crochet pour accrocher les masses à mesurer.



*Exemple de peson à ressort.  
Source : Wikipédia*

Le peson est suspendu par l'une de ses extrémités. Lorsqu'on y accroche une masse, son ressort s'allonge.

Au repos, le ressort du peson a pour longueur 14 cm.

Avec une masse de 10 g, le ressort a pour longueur 14,5 cm.

Chaque fois que l'on ajoute 10g à une masse déjà suspendue, le ressort s'allonge de 0,5cm.

1. Quelle longueur mesurera le ressort si on suspend une masse de 70 g ?
2. L'artisan constate que le ressort mesure 28 cm. Quelle masse a-t-elle été suspendue au ressort ?
3. La longueur du ressort est-elle proportionnelle à la masse suspendue ? Justifier votre réponse.

**Exercice 3.**

Les questions 1 et 2 sont indépendantes. Toutes les réponses devront être justifiées.

1. On considère un nombre rationnel  $\frac{p}{q}$ , où  $p$  et  $q$  sont des nombres entiers,  $q$  étant non nul.

Ce nombre a pour valeur approchée par excès à  $10^{-3}$  près 1,118.

On sait de plus que  $q = 1\,789$ .

Quelle(s) est (sont) la (les) valeur(s) possible(s) pour  $p$  ?

2. L'objectif de cette question est d'établir un résultat pour la comparaison de deux nombres ayant pour écritures fractionnaires  $\frac{n-1}{n}$  et  $\frac{n}{n+1}$  où  $n$  est un nombre entier naturel non nul.

(a) Comparer  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{2}{3}$  ;  $\frac{12}{13}$  et  $\frac{13}{14}$  ;  $\frac{176}{177}$  et  $\frac{177}{178}$ . Quel résultat général peut-on conjecturer ?

(b) Démontrer ce résultat.

(c) Comparer les nombres  $\frac{987\,654\,321}{987\,654\,322}$  et  $\frac{987\,654\,322}{987\,654\,323}$  sans effectuer de calcul.

**Exercice 4.**

On joue à un jeu nécessitant deux dés différents.

Le premier dé est un tétraèdre régulier à 4 faces ; une face est rouge, une est bleue et les deux autres sont jaunes.

Le deuxième est un dé cubique à 6 faces numérotées de 1 à 6.

On suppose les deux dés bien équilibrés.

On lance en premier le dé tétraédrique et on note la couleur de la face sur laquelle il repose.

Puis on lance le dé à 6 faces et on note le numéro porté sur la face de dessus.

- Calculer la probabilité d'obtenir la couleur rouge sur le dé tétraédrique et 4 sur l'autre dé.
- Calculer la probabilité d'obtenir la couleur jaune sur le dé tétraédrique et un nombre impair sur l'autre dé.