

## Épreuve de mathématiques CRPE 2015 groupe 3.

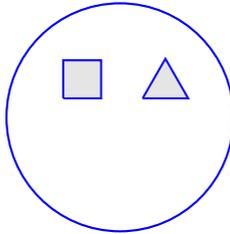
Lien vers le corrigé seul : [pdf](#).

*Durée : 4 heures.*

### Première partie.

**13 points**

Un professeur veut préparer le matériel nécessaire pour mener une activité de découverte des formes géométriques. Il souhaite proposer aux élèves de fabriquer des figures comme ci- dessous, par découpage, collage puis coloriage. Il voudrait que chacune de ces figures, qui évoque une tête, ait un « œil » en forme de carré et un « œil » en forme de triangle équilatéral.

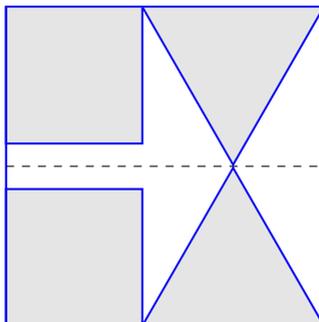


*Figure 1*

Il dispose de feuilles cartonnées dans lesquelles il découpera des carrés. Dans ces carrés, les élèves réaliseront les différents découpages requis.

### A. Étude de la situation concrète.

La documentation dont il dispose propose de découper deux paires d'yeux dans des carrés de 7 cm de côté selon le schéma approximatif suivant :



*Figure 2*

dans lequel les figures grisées sont des carrés de 3 cm de côté et des triangles équilatéraux de 4 cm de côté.

1. (a) Vérifier qu'il est possible de découper dans un carré de 7 cm de côté, deux paires d'yeux formées d'un carré de côté 3 cm et d'un triangle équilatéral de côté 4 cm, dans la disposition de la *Figure 2*.

*Dans cette question, on pourra utiliser le résultat suivant :*

La mesure  $h$  de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté de mesure  $a$  est :

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

- (b) Le professeur constate que les carrés et les triangles équilatéraux que les élèves auront à découper ont le même périmètre. Ont-ils la même aire ?
2. Le professeur se demande s'il est possible de choisir d'autres dimensions pour les yeux de telle sorte qu'on puisse les découper dans des feuilles carrées de 7 cm de côté dans la disposition de la *Figure 2*, le carré et le triangle équilatéral ayant le même périmètre.

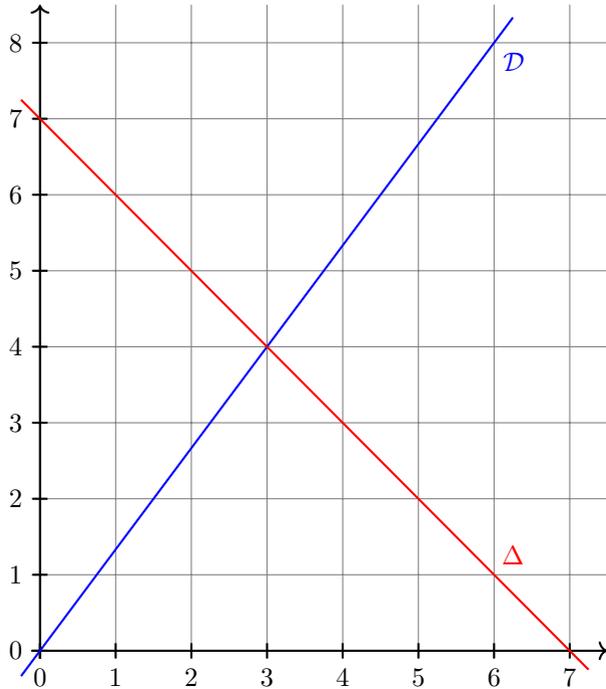
Pour cela, il appelle  $x$  le côté du carré grisé et  $y$  celui du triangle équilatéral grisé.

- (a) Expliquer pourquoi si  $x$  et  $y$  sont solutions du problème, alors ils vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x + y = 7 \\ 2x \leq 7 \\ y\sqrt{3} \leq 7 \end{cases}$$

- (b) Sur le graphique ci-dessous on a représenté les fonctions  $f$  et  $g$  définies par :

$$f(x) = \frac{4}{3}x \text{ et } g(x) = 7 - x$$



Expliquer comment cette représentation graphique peut permettre de répondre au problème que se pose le professeur.

- (c) Résoudre par le calcul le système  $\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x + y = 7 \end{cases}$  et en déduire la solution au problème.

3. Vingt-cinq élèves doivent participer à cette activité.

Le professeur dispose de feuilles cartonnées de format A3, de dimensions, en mm,  $420 \times 297$ . Il veut que chaque élève dispose d'un carré de 14 cm de côté, dans lequel il découpera un disque de rayon 7 cm pour faire la tête, et d'un rectangle de dimensions 7 cm sur 3,5 cm, dans lequel il découpera une paire d'yeux.

Quel nombre minimal de feuilles cartonnées de format A3 doit prévoir le professeur ?

## B. Démonstration de résultats mathématiques.

1. Démontrer le résultat rappelé à la question A.1.a) :

La mesure  $h$  de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté de mesure  $a$  est :

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

2. Dans cette question, on considère un carré de côté  $x$  et un triangle équilatéral de côté  $y$  avec  $y = \frac{4}{3}x$ .
- (a) Vérifier que ce carré et ce triangle équilatéral ont le même périmètre.
- (b) Exprimer l'aire  $A_1$  du carré et l'aire  $A_2$  du triangle équilatéral en fonction de  $x$ .  
En déduire le rapport  $\frac{A_2}{A_1}$ .
- (c) Expliquer pourquoi les réponses aux questions (a) et (b) ci-dessus permettent de retrouver le résultat de la question A.1.b).

## Deuxième partie.

**13 points**

Cette partie est constituée de quatre exercices indépendants.

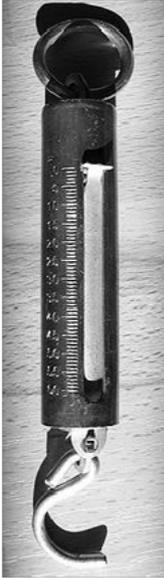
### Exercice 1.

Un vététiste fait chaque semaine une sortie depuis son domicile situé à une altitude de 500 m, jusqu'à un col culminant à une altitude de 1 350 m. Il a le choix entre emprunter une route goudronnée de 27 km ou une piste en terre de 28 km.

1. La semaine dernière, il a décidé de prendre la route goudronnée. En partant à 8 h 10 min, il est arrivé au col à 9 h 40 min. À quelle vitesse moyenne a-t-il roulé ?
2. Cette semaine il a pris la piste en terre. Il constate qu'il a mis 1 h 45 min pour effectuer ce trajet. De quel pourcentage sa vitesse moyenne a-t-elle diminué ?

### Exercice 2.

Pour colorer l'émail des objets qu'il fabrique, un artisan utilise des oxydes métalliques. Pour peser certains de ces oxydes métalliques, il utilise un peson à ressort constitué d'un ressort, d'une réglette et d'un crochet pour accrocher les masses à mesurer.



*Exemple de peson à ressort.  
Source : Wikipédia*

Le peson est suspendu par l'une de ses extrémités. Lorsqu'on y accroche une masse, son ressort s'allonge.

Au repos, le ressort du peson a pour longueur 14 cm.

Avec une masse de 10 g, le ressort a pour longueur 14,5 cm.

Chaque fois que l'on ajoute 10g à une masse déjà suspendue, le ressort s'allonge de 0,5cm.

1. Quelle longueur mesurera le ressort si on suspend une masse de 70 g ?
2. L'artisan constate que le ressort mesure 28 cm. Quelle masse a-t-elle été suspendue au ressort ?
3. La longueur du ressort est-elle proportionnelle à la masse suspendue ? Justifier votre réponse.

### Exercice 3.

**Les questions 1 et 2 sont indépendantes. Toutes les réponses devront être justifiées.**

1. On considère un nombre rationnel  $\frac{p}{q}$ , où  $p$  et  $q$  sont des nombres entiers,  $q$  étant non nul.

Ce nombre a pour valeur approchée par excès à  $10^{-3}$  près 1,118.

On sait de plus que  $q = 1789$ .

Quelle(s) est (sont) la (les) valeur(s) possible(s) pour  $p$  ?

2. L'objectif de cette question est d'établir un résultat pour la comparaison de deux nombres ayant pour écritures fractionnaires  $\frac{n-1}{n}$  et  $\frac{n}{n+1}$  où  $n$  est un nombre entier naturel non nul.

(a) Comparer  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{2}{3}$  ;  $\frac{12}{13}$  et  $\frac{13}{14}$  ;  $\frac{176}{177}$  et  $\frac{177}{178}$ . Quel résultat général peut-on conjecturer ?

(b) Démontrer ce résultat.

(c) Comparer les nombres  $\frac{987\ 654\ 321}{987\ 654\ 322}$  et  $\frac{987\ 654\ 322}{987\ 654\ 323}$  sans effectuer de calcul.

#### Exercice 4.

On joue à un jeu nécessitant deux dés différents.

Le premier dé est un tétraèdre régulier à 4 faces ; une face est rouge, une est bleue et les deux autres sont jaunes.

Le deuxième est un dé cubique à 6 faces numérotées de 1 à 6.

On suppose les deux dés bien équilibrés.

On lance en premier le dé tétraédrique et on note la couleur de la face sur laquelle il repose.

Puis on lance le dé à 6 faces et on note le numéro porté sur la face de dessus.

- Calculer la probabilité d'obtenir la couleur rouge sur le dé tétraédrique et 4 sur l'autre dé.
- Calculer la probabilité d'obtenir la couleur jaune sur le dé tétraédrique et un nombre impair sur l'autre dé.

### Troisième partie.

**14 points**

Cette partie est constituée de quatre situations indépendantes.

#### Situation n°1.

L'exercice ci-dessous a été donné en évaluation à des élèves de CMI.

*Une école organise une sortie de fin d'année. Pour se déplacer, le directeur loue des bus qui peuvent accueillir 42 passagers chacun. Il y a 157 élèves dans l'école et 20 adultes les accompagneront. Combien faut-il réserver de bus ?*

1. Quelle opération mathématique est l'enjeu de ce problème ?
2. Dans l'annexe, sont présentées les productions de quatre élèves A, B, C et D. Pour chacune d'elles, expliquer la procédure utilisée.
3. Un autre élève de la classe a effectué la division de 157 par 20. À quelle question ce calcul pourrait-il répondre ?
4. La situation du problème de départ et celle de la question 3. illustrent deux sens différents de la division. Les expliciter.

### Situation n°2.

L'exercice ci-dessous a été donné en évaluation à des élèves de CM1.

*J'avais 28 litres d'essence. J'ai rempli de façon identique 8 bidons de même contenance en utilisant toute l'essence. Combien ai-je mis de litres dans chaque bidon ?*

1. Quelle opération permet de répondre à cette question ?
2. Dans l'annexe, sont présentées les productions de trois élèves E, F et G. Pour chacune de ces productions expliquer la procédure utilisée.

### Situation n°3.

Voici un autre exercice proposé à des élèves de CM2.

*Il faut exactement 28 litres d'essence pour remplir complètement 8 bidons de contenance identique. Combien peut-on remplir de bidons avec 7 litres d'essence ?*

1. De quelle(s) notion(s) mathématique(s) relève cet exercice ?
2. Proposer deux résolutions différentes de cet exercice qui peuvent être attendues d'un élève de CM2, en explicitant les raisonnements sous-jacents.

### Situation n°4.

L'exercice suivant a été donné à des élèves de l'école primaire :

*On découpe un ruban mesurant 137,6 cm en 8 morceaux de même longueur. Combien mesure chacun des morceaux ?*

1. Quel sens de la division illustre-t-il ?
2. Proposer une procédure pour résoudre ce problème, permettant de se ramener à une opération sur les nombres entiers.
3. Proposer une procédure de calcul qui peut être attendue d'un élève de CM2 pour effectuer la division  $137,6 \div 8$ , sans se ramener à une opération sur les entiers.
4. Le quotient d'un nombre décimal par 8 est-il toujours un nombre décimal ? justifier.

Annexe  
Situation n°1

Élève A

Je cherche le nombre de bus qu'il faudrait.

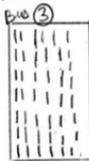
Je cherche le nombre de bus qu'il faudrait.



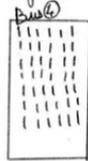
$$\begin{array}{r} 177 \\ - 42 \\ \hline 135 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 135 \\ - 42 \\ \hline 93 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 93 \\ - 42 \\ \hline 51 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 51 \\ - 42 \\ \hline 09 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 09 \\ - 09 \\ \hline 00 \end{array}$$

Il faudrait 5 Bus.

Il faudrait 5 Bus

Élève B

Je cherche combien faut-il de bus

Je cherche combien faut-il de bus.

$$\begin{array}{r} 157 \\ + 20 \\ \hline 177 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times 3 \\ \hline 126 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times 4 \\ \hline 168 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times 5 \\ \hline 210 \end{array}$$

J'ai additionné le nombre d'élèves et d'adultes et multiplié les places qu'il y a dans un bus

J'ai additionné le nombre d'élèves et d'adultes et multiplié les places qu'il y a dans un bus

Il faudra réserver 5 bus

Il faudra réserver 5 bus

## Élève C

$$\begin{array}{r} 157 \\ + 20 \\ \hline 177 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 177 \\ - 168 \\ \hline 009 \end{array} \quad \begin{array}{r} 42 \\ 4 \end{array}$$

Il faut réserver  
5 bus pour tous les  
élèves et pour  
tous les adultes.

Il faut réserver 5 bus  
pour tous les élèves et  
pour tous les adultes.

## Élève D

$$\begin{array}{r} 42 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{r} 84 \\ 42 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{r} 126 \\ 42 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{r} 168 \\ 42 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{r} 177 \\ 42 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{r} 9 \end{array}$$

Il faut réserver 5 bus

Il faut réserver 5 bus

J'ai fait comme ça  
pour voir combien de bus  
le directeur doit réserver.

J'ai fait comme ça pour  
voir combien de bus  
le directeur doit réserver.

Annexe  
Situation n°2

Élève E

Je cherche le nombre de litre qu'il y aurait dans chaque bidon

je cherche le nombre de litre qu'il y aurait dans chaque bidon.

1L = 1000ml

1L = 1000 ml



Chaque bidon contiendra 3<sup>1</sup>/<sub>2</sub>l

Chaque bidon contiendra 3L et demi

Élève F

1	1	1	1	1	1	1	1
1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3
1/3	1/3	1/3	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2

Tout les bidon son remplis avec 3 demi.

Tout les bidon son emplis avec 3 demi

Élève G

J'ai mis 3,5 litres dans les 8 bidons.

$$\begin{array}{r|l} 28 & 8 \\ -24 & 3,5 \\ \hline & 48 \\ & 40 \\ \hline & 0 \end{array}$$

J'ai mis 3,5 litres dans les 8 bidons.