Épreuve de mathématiques CRPE 2015 groupe 3.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Première partie. 13 points

A. Étude de la situation concrète.

1. (a) Il est clair que $3 + 4 \leq 7$. Vérifions que le découpage est possible dans l'autre dimension.
   D'après l'énoncé la hauteur du triangle équilatéral est :

$$\begin{aligned} h &= \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

   Donc : $h^2 = 12 = \frac{48}{4} \leq \frac{49}{4}$.
   La fonction racine carrée étant croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$h \leq \frac{7}{2}$$

   Et donc :

$$2h \leq 7.$$

   Sinon : $2h = 2 \times 2\sqrt{3} \approx 5,657$ à 10^{-3} près par excès est bien inférieur à 7.
   Autrement dit

   > on peut effectivement disposer les triangles équilatéraux comme sur le schéma.

   (b) Calculons les aires des deux figures.

   * Aire du carré :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_c &= 3^2 \\ &= 9 \end{aligned}$$

* Aire du triangle :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_t &= \frac{1}{2} \times 4 \times h\\ &= 2 \times 2\sqrt{3}\\ &= 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

Le carré et le triangle n'ont pas la même aire.

2. (a) Expliquons le système.

* $4x - 3y = 0$ signifie que les triangles ont le même périmètre.
* $x + y = 7$ signifie que la longueur du coté du carré plus celle du triangle exhausse la longueur du coté du carré de carton.
* $2x \leq 7$ signifie que sur une largeur de la feuille de carton on doit pouvoir mettre au moins deux carrés semblables.
* $y\sqrt{3} \leq 7$ signifie que sur la largeur de la feuille de carton on doit pouvoir mettre deux triangles équilatéraux semblables ayant un sommet commun.

(b) Interprétons graphiquement le système.

* $4x - 3y = 7 \iff y = \frac{4}{3}x$. On reconnaît l'expression algébrique de f donc $\mathcal{D}: \ y = \frac{4}{3}x$ est la courbe représentative de f.
* $x + y = 7 \iff y = 7 - x$. On reconnaît l'expression algébrique de g et donc $\Delta: \ y = 7 - x$ est la courbe représentative de la fonction g.
* $2x \leq 7 \iff x \in \left[0; \frac{7}{2}\right]$.
* $y\sqrt{3} \leq 7 \iff y \in \left[0; \frac{7}{3}\sqrt{3}\right]$.

On voit graphiquement que les deux premières conditions sont, simultanément, réalisées uniquement lorsque $x = 3$ et $y = 4$ et que de plus les deux inégalités sont alors vérifiées.

Le découpage proposé est donc le seul possible.

(c) Résolvons le système linéaire de deux équations à deux inconnues.

$$\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ -7y = -28 \qquad L_2 \leftarrow L_1 - 4L_2 \end{cases}$$

D'où : $-7y = -28 \Leftrightarrow y = 4$
puis par substitution : $4x - 3y = 0 \Leftrightarrow 4x - 3 \times 4 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.
Comme de plus $2 \times 3 \leqslant 7$ et $4 \times \sqrt{3} \leqslant 7$,

la seule solution possible au problème est $x = 3$ et $y = 4$.

3. Déterminons le nombre minimal de feuilles à prévoir.

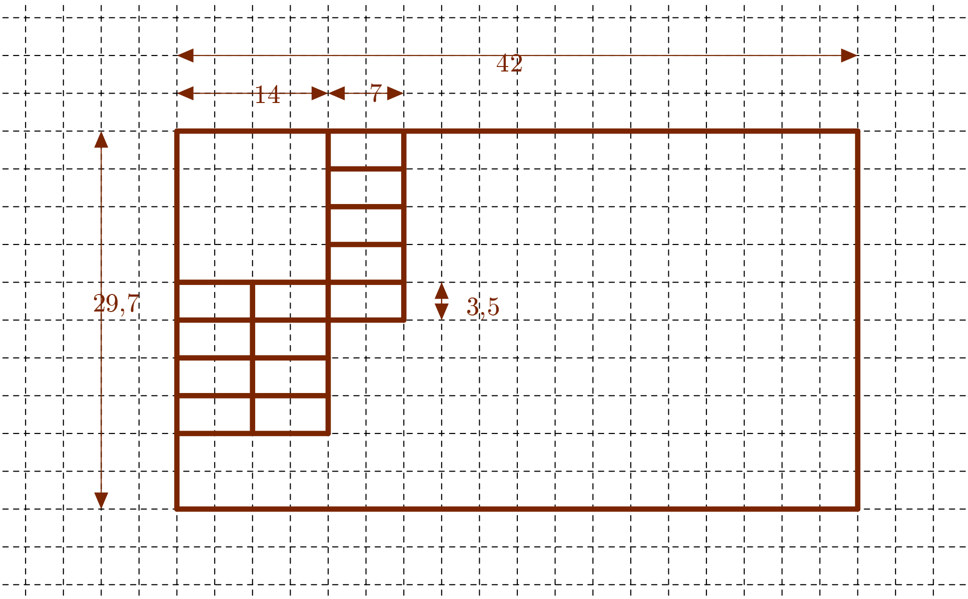
Dans la largeur d'une feuille le nombre de carré de 14 cm que l'on peut découper est :

$$\frac{297}{140} \approx 2,12$$

Autrement dit 2 carrés entiers.
Dans la longueur d'une feuille le nombre de carré de 14 cm que l'on peut découper est :

$$\frac{420}{140} = 3$$

Autrement dit 3 carrés entiers.
Une telle feuille peut donc contenir 6 carrés. Puisqu'il y a 25 élèves il faudra 5 feuilles. La dernière feuille n'étant occupée que par un seul carré de 14 cm. Il faut donc découper les petits rectangles dans le reste de la feuille. La situation peut être schématisée par :



Dans cette situation le nombre de rectangles que l'on peut découper est (en notant E la fonction partie entière) :

$$2 \times E\left(\frac{29,7-14}{3,5}\right) + E\left(\frac{42-14}{7}\right) \times E\left(\frac{29,7}{3,5}\right) = 64$$

Ce qui est suffisant pour tous les élèves (il en fallait 50).

B. Démonstration de résultats mathématiques.

1. Déterminons la hauteur d'un triangle équilatéral.

Soient ABC un triangle équilatéral de côté de longueur a, H le pied de la hauteur issue de A, $a = BC$, $h = AH$.
Par construction le triangle AHB est rectangle en H, donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$AH^2 + HB^2 = AB^2$$

Dans un triangle équilatéral hauteurs et médianes sont confondues donc H est le milieu de $[BC]$ et $HB = \frac{a}{2}$. La précédente égalité s'écrit donc :

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$$

On en déduit : $h^2 = \frac{3}{4}a^2$. Et comme h est une longueur donc un nombre positif :

$$\boxed{h = \frac{\sqrt{3}a}{2}.}$$

2. (a)

$$y = \frac{4}{3}x \iff 3y = 4x.$$

Autrement dit le périmètre du triangle équilatéral, $3y$, égale le périmètre du carré, $4x$.

> Triangle et carré ont même périmètre.

(b) Déterminons $\frac{A_2}{A_1}$.

L'aire du carré est, en fonction de x :

$$A_1 = x^2.$$

En utilisant la formule de la hauteur dans un triangle équilatéral il est aisé de trouver l'aire d'un triangle équilatéral de côté mesurant y :

$$\begin{aligned} A_2(y) &= \frac{y \times \frac{y\sqrt{3}}{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}y^2 \end{aligned}$$

Et comme $y = \frac{4}{3}x$:

$$\begin{aligned} A_2(x) &= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{16}{9}x^2 \\ &= \frac{4}{9}x^2\sqrt{3} \end{aligned}$$

D'où le quotient :

$$\boxed{\frac{A_2}{A_1} = \frac{4}{9}\sqrt{3}.}$$

(c) Les questions précédentes permettent d'affirmer que les triangle et carré ont même périmètre (question a) et que le rapport des aires étant différent de 1 la mesure de leurs aires différent.

Deuxième partie. 13 points

Exercice 1.

1. Calculons sa vitesse moyenne v_1.

   Il a fait un trajet de 27 km en 90 minutes. Sa vitesse en km par minutes est de :

$$v_1 = \frac{27}{90}$$

   Soit en km par heure :

$$v_1 = \frac{27}{90} \times 60$$

$$\boxed{v_1 = 18 \text{ km.h}^{-1}.}$$

2. Déterminons le pourcentage de diminution.

   La durée du trajet en heures est :

$$1 + \frac{45}{60} = 1,75.$$

   Le trajet étant de 28 km sa vitesse moyenne en kilomètres par heure est :

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{28}{1,75} \\ &= 16 \text{ kp.h}^{-1} \end{aligned}$$

   Le taux d'évolution en pourcentage de la vitesse est :

$$\frac{v_2 - v_1}{v_1} \times 100 \approx -11,11\%.$$

   Ainsi

$$\boxed{\text{sa vitesse moyenne a diminué d'environ } 11,11\%.}$$

Exercice 2.

On peut remarquer que la formule liant la masse m en grammes et la longueur l du ressort en centimètres est :

$$l = 14 + 0,5 \times \frac{m}{10}$$

Il s'en déduit :

$$m = \frac{10}{0,5}(l - 14)$$

1. Calculons la longueur du ressort pour une masse de 70 g.

   En procédant à la division euclidienne :

   $$70 = 7 \times 10$$

   Donc le ressort mesurera :

   $$14 + 7 \times 0,5 = 17,5 \text{ cm}$$

   Pour une masse de 70 g l'allongement du ressort et de $17,5$ cm.

2. Déterminons la masse pour un allongement de 28 cm.

   Le ressort a été allongé de $28 - 14 = 14$ cm. Or : $14 = 28 \times 0,5$, donc on a ajouter 28 fois 10 grammes.

   La masse suspendue était de 280 grammes.

3. Démontrons qu'il n'y a pas de proportionnalité.

   Il n'y a de proportionnalité car (on pourrait arguer d'une fonction affine qui n'est pas linéaire mais je préfère passer par un contre exemple) :

Masse	70	280
Longueur	17,5	28

   Or il n'y a pas de proportionnalité car :

   $$70 \times 28 - 17,5 \times 280 = -2940 \neq 0$$

   La longueur n'est pas proportionnelle à la masse.

Exercice 3.

1. Déterminons p par analyse-synthèse.

   * Interprétons les conditions données par l'énoncé.
   — Ce nombre a pour valeur approchée par excès à 1^{-3} près 1,118, donc :

   $$1,117 \leq \frac{p}{q} \leq 1,118$$

   — On sait de plus que $q = 1789$, donc :

   $$1,117 \leq \frac{p}{1789} \leq 1,118$$

   De cet encadrement on déduit :

   $$1789 \times 1,117 \leq p \leq 1789 \times 1,118$$
   $$1998,313 \leq p \leq 2000,102$$

   Et puisque p est un entier :

   $$1999 \leq p \leq 2000$$

   * Réciproquement, si $p = 1999$ (respectivement $p = 2000$), alors $_{f}racp1789 \approx 1,11738$ (resp. $\frac{p}{1789} \approx 1,11794$). Autrement dit

   les deux valeurs possibles pour p sont 1999 et 2000.

2. (a) Comparons les nombres.

   Comparer deux nombres c'est étudier le signe de leur différence.
   *

   $$\begin{aligned}\frac{1}{2} - \frac{2}{3} &= \frac{1 \times 2 - 2 \times 2}{2 \times 3} \\ &= -\frac{2}{6} \\ &< 0\end{aligned}$$

   Donc : $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$

* De même :

$$\frac{12}{13} - \frac{13}{14} = -\frac{1}{182}$$
$$< 0$$

* De même :

$$\frac{176}{177} - \frac{177}{178} = -\frac{1}{31506}$$
$$< 0$$

On peut conjecturer : $\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$.

(b) Démontrons que quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$.

Soit n un entier naturel non nul.
L'inégalité proposée est successivement équivalente à :

$$\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$$

et puisque $n > 0$:

$$(n-1)(n+1) < n^2$$

en reconnaîssant une identité remarquable :

$$n^2 - 1 < n^2$$

Or cette dernière inégalité est toujours vraie (quelque soit le n choisi), donc on a bien démontré que

pour tout naturel non nul n : $\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$.

(c) En appliquant le résultat précédent à l'exemple proposé :

$\frac{987\,654\,321}{987\,654\,322} < \frac{987\,654\,322}{987\,654\,323}$.

Exercice 4.

1. Calculons la probabilité d'obtenir rouge et 4.

   L'expérience aléatoire consiste à lancer deux dés et à noter les résultats obtenus. Les issues sont donc les couples formés d'une des quatre couleurs et d'un chiffre entre 1 et 6.
   On peut représenter cette situation par un arbre ou un tableau. je choisis ici le tableau (car il y a deux épreuves) :

	1	2	3	4	5	6
R (rouge)	(R,1)	(R,2)	(R,3)	(R,4)	(R,5)	(R,6)
B (bleue)	(B,1)	(B,2)	(B,3)	(B,4)	(B,5)	(B,6)
J (jaune 1)	(J,1)	(J,2)	(J,3)	(J,4)	(J,5)	(J,6)
J (jaune 2)	(J,1)	(J,2)	(J,3)	(J,4)	(J,5)	(J,6)

   Chacun des couples du tableau à la même probabilité de sortir : il y a équiprobabilité entre les issues. Il y a 24 issues, donc la probabilité d'une issue est $\frac{1}{24}$.
   L'événement « obtenir la couleur rouge sur le dé tétraédrique et 4 sur l'autre dé » est réalisé par une seule issue donc

   l'événement « obtenir la couleur rouge sur le dé tétraédrique et 4 sur l'autre dé » est réalisé avec une probabilité de $\frac{1}{24}$.

2. Notons A : « obtenir la couleur jaune sur le dé tétraédrique et un nombre impair sur l'autre dé ».

   Calculons $P(A)$.

   A est, d'après le tableau précédent, réalisé par 18 issues, donc : $P(A) = \frac{18}{24}$.

   $$P(A) = \frac{3}{4}.$$

Troisième partie. 14 points

Situation n°1.

1.
2.
3.
4.

Situation n°2.

1.
2.

Situation n°3.

1.
2.

Situation n°4.

1.
2.
3.
4.