CRPE 2015 épreuve de mathématiques groupement académique 3.

Première partie. 13 points

Un professeur veut préparer le matériel nécessaire pour mener une activité de découverte des formes géométriques. Il souhaite proposer aux élèves de fabriquer des figures comme ci- dessous, par découpage, collage puis coloriage. Il voudrait que chacune de ces figures, qui évoque une tête, ait un « œil » en forme de carré et un « œil » en forme de triangle équilatéral.

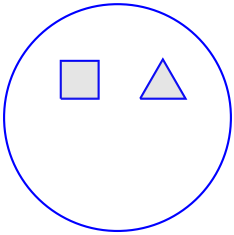


Figure 1

Il dispose de feuilles cartonnées dans lesquelles il découpera des carrés. Dans ces carrés, les élèves réaliseront les différents découpages requis.

A. Étude de la situation concrète.

La documentation dont il dispose propose de découper deux paires d'yeux dans des carrés de 7 cm de côté selon le schéma approximatif suivant :

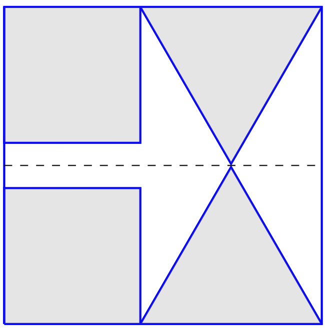


Figure 2

dans lequel les figures grisées sont des carrés de 3 cm de côté et des triangles équilatéraux de 4 cm de côté.

1. (a) Vérifier qu'il est possible de découper dans un carré de 7 cm de côté, deux paires d'yeux formées d'un carré de côté 3 cm et d'un triangle équilatéral de côté 4 cm, dans la disposition de la *Figure 2*.

Dans cette question, on pourra utiliser le résultat suivant :

La mesure h de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté de mesure a est : $$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Il est clair que $3 + 4 \leq 7$. Vérifions que le découpage est possible dans l'autre dimension.

D'après l'énoncé la hauteur du triangle équilatéral est :

$$\begin{aligned} h &= \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Donc : $h^2 = 12 = \frac{48}{4} \leq \frac{49}{4}$.

La fonction racine carrée étant croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$h \leq \frac{7}{2}$$

Et donc :

$$2h \leq 7$$

Autrement dit on peut effectivement disposer les triangles équilatéraux comme sur le schéma.

(b) Le professeur constate que les carrés et les triangles équilatéraux que les élèves auront à découper ont le même périmètre. Ont-ils la même aire ?

* Aire du carré :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_c &= 3^2 \\ &= 9 \end{aligned}$$

* Aire du triangle :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_t &= \frac{1}{2} \times 4 \times h \\ &= 2 \times 2\sqrt{3} \\ &= 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

* Ils n'ont pas la même aire.

2. Le professeur se demande s'il est possible de choisir d'autres dimensions pour les yeux de telle sorte qu'on puisse les découper dans des feuilles carrées de 7 cm de côté dans la disposition de la *Figure 2*, le carré et le triangle équilatéral ayant le même périmètre.

   Pour cela, il appelle x le côté du carré grisé et y celui du triangle équilatéral grisé.

   (a) Expliquer pourquoi si x et y sont solutions du problème, alors ils vérifient le système suivant :

   $$\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x + y = 7 \\ 2x \leq 7 \\ y\sqrt{3} \leq 7 \end{cases}$$

   $4x - 3y = 0$ signifie que les triangles ont le même périmètre.

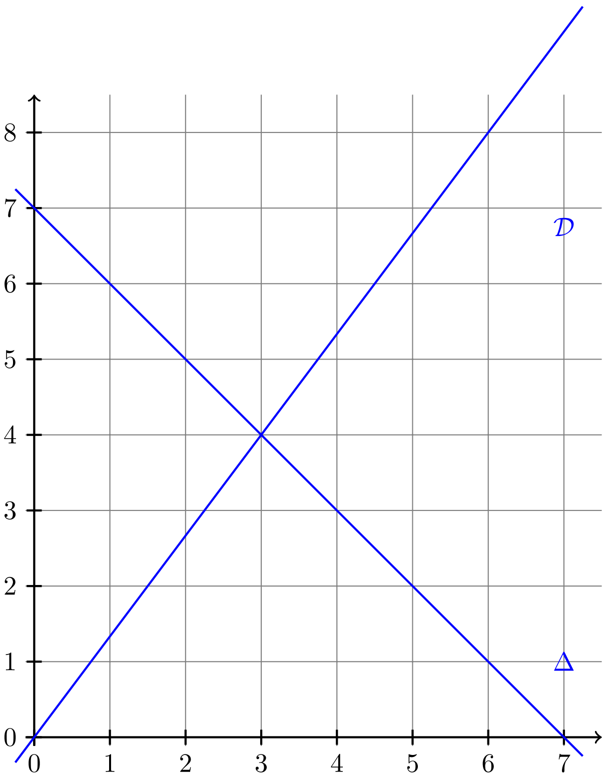
   $x + y = 7$ signifie que la longueur du coté du carré plus celle du triangle exhausse la longueur du coté du carré de carton.

   $2x \leq 7$ signifie que sur une largeur de la feuille de carton on doit pouvoir mettre au moins deux carrés semblables.

   $y\sqrt{3} \leq 7$ signifie que sur la largeur de la feuille de carton on doit pouvoir mettre deux triangles équilatéraux semblables ayant un sommet commun.

   (b) Sur le graphique ci-dessous on a représenté les fonctions f et $g$définies par :

   $$f(x) = \frac{4}{3}x \text{ et } g(x) = 7 - x$$



Expliquer comment cette représentation graphique peut permettre de répondre au problème que se pose le professeur.

* $4x - 3y = 7 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x = f(x)$. Autrement dit $\mathcal{D}$: $y = \frac{4}{3}x$ est la courbe représentative de f.

* $x + y = 7 \Rightarrow y = 7 - x = g(x)$. Autrement dit Δ : $y = 7 - x$ est la courbe représentative de la fonction g.

* $2x \leq 7 \Rightarrow x \in \left[0; \frac{7}{2}\right]$.

* $y\sqrt{3} \leq 7 \Rightarrow y \in \left[0; \frac{7}{3}\sqrt{3}\right]$

On voit graphiquement que les deux premières conditions sont réalisées uniquement lorsque $x = 3$ et $y = 4$ et que de plus les deux inégalités sont alors vérifiées. Le découpage proposé est donc le seul possible.

(c) Résoudre par le calcul le système $\left\{ \begin{array}{l} 4x - 3y = 0 \\ x + y = 7 \end{array} \right.$ et en déduire la solution au problème.

$$\begin{cases} 4x - 3y = 7 & L_1 \\ x + y = 7 & L_1 + 3L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 3y = 7 & L_1 \\ 7x = 28 & \frac{1}{4}L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 3y = 7 & -L_1 + 4L_2 \\ x = 4 & L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y = 9 & \frac{1}{3}L_1 \\ x = 4 & L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = 4 \end{cases}$$

La seule solution possible au problème est $x = 3$ et $y = 4$.

3. Vingt-cinq élèves doivent participer à cette activité.

   Le professeur dispose de feuilles cartonnées de format `A3`, de dimensions, en mm, 420×297. Il veut que chaque élève dispose d'un carré de 14 cm de côté, dans lequel il découpera un disque de rayon 7 cm pour faire la tête, et d'un rectangle de dimensions 7 cm sur 3,5 cm, dans lequel il découpera une paire d'yeux.

   Quel nombre minimal de feuilles cartonnées de format `A3` doit prévoir le professeur ?

   Dans la largeur d'une feuille le nombre de carré de 14 cm que l'on peut découper est :

$$\frac{297}{140} \approx 2{,}12$$

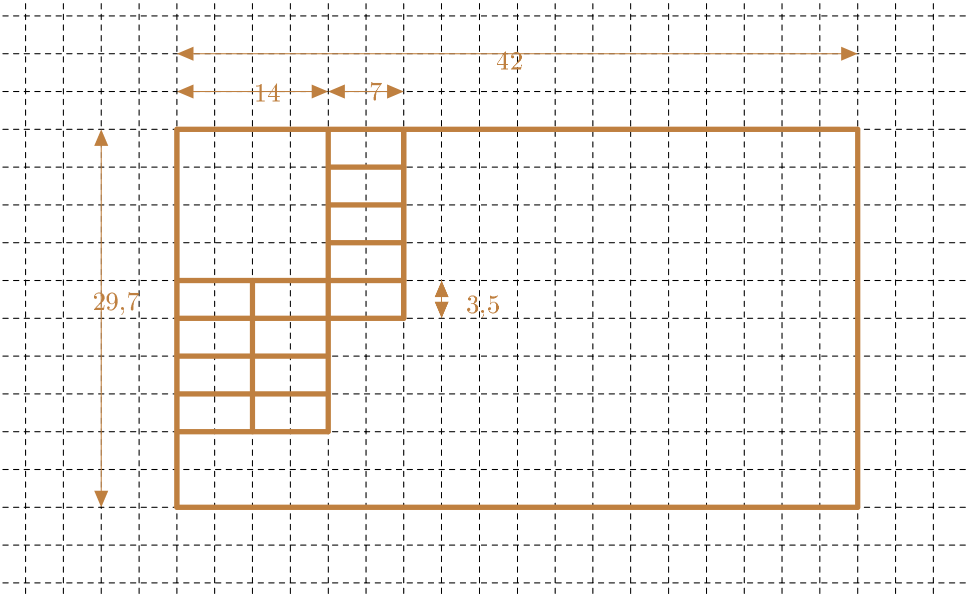
   Autrement dit 2 carrés entiers.

   Dans la longueur d'une feuille le nombre de carré de 14 cm que l'on peut découper est :

$$\frac{420}{140} = 3$$

   Autrement dit 3 carrés entiers.

   Une telle feuille peut donc contenir 6 carrés. Puisqu'il y a 25 élèves il faudra 5 feuilles. La dernière feuille n'étant occupée que par un seul carré de 14 cm. Il faut donc découper les petits rectangles dans le reste de la feuille. La situation peut être schématisée par :



Dans cette situation le nombre de rectangles que l'on peut découper est (en notant E la fonction partie entière) :

$$2 \times E\left(\frac{29{,}7 - 14}{3{,}5}\right) + E\left(\frac{42 - 14}{7}\right) \times E\left(\frac{29{,}7}{3{,}5}\right) = 64$$

Ce qui est suffisant pour tous les élèves (il en fallait 50).

B. Démonstration de résultats mathématiques.

1. Démontrer le résultat rappelé à la question `A.1.a)` :

> La mesure h de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté de mesure a est :
> $$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Soient ABC un triangle équilatéral de côté de longueur a, H le pied de la hauteur issue de A, $a = BC$, $h = AH$.
Par construction le triangle AHB est rectangle en H, donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$AH^2 + HB^2 = AB^2$$

Dans un triangle équilatéral hauteurs et médianes sont confondues donc H est le milieu de $[BC]$ et $HB = \frac{a}{2}$. La précédente égalité s'écrit donc :

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$$

On en déduit : $h^2 = \frac{3}{4}a^2$. Et comme h est une longueur donc un nombre positif :

$$h = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

2. Dans cette question, on considère un carré de côté x et un triangle équilatéral de côté y avec $y = \frac{4}{3}x$.

   (a) Vérifier que ce carré et ce triangle équilatéral ont le même périmètre.

   $$y = \frac{4}{3}x \Leftrightarrow 3y = 4x$$

   Autrement dit le périmètre du triangle équilatéral $(3y)$ égale le périmètre du carré $(4x)$.

   (b) Exprimer l'aire A_1 du carré et l'aire A_2 du triangle équilatéral en fonction de x.
   En déduire le rapport $\frac{A_2}{A_1}$.

   L'aire du carré est, en fonction de x :

   $$A_1 = x^2$$

   En utilisant la formule de la hauteur dans un triangle équilatéral il est aisé de trouver l'aire d'un triangle équilatéral de côté mesurant y :

   $$\begin{aligned} A_2(y) &= \frac{y \times \frac{y\sqrt{3}}{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}y^2 \end{aligned}$$

   Et comme $y = \frac{4}{3}x$:

   $$\begin{aligned} A_2(x) &= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{16}{9}x^2 \\ &= \frac{4}{9}x^2\sqrt{3} \end{aligned}$$

D'où le quotient :

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{4}{9}\sqrt{3}$$

(c) Expliquer pourquoi les réponses aux questions (a) et (b) ci-dessus permettent de retrouver le résultat de la question A.1.b).

Les questions précédentes permettent d'affirmer que les triangle et carré ont même périmètre (question a) et que le rapport des aires étant différent de 1 la mesure de leurs aires différent.

Deuxième partie. 13 points

Cette partie est constituée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1.

Un vététiste fait chaque semaine une sortie depuis son domicile situé à une altitude de 500 m, jusqu'à un col culminant à une altitude de 1 350 m. Il a le choix entre emprunter une route goudronnée de 27 km ou une piste en terre de 28 km.

1. La semaine dernière, il a décidé de prendre la route goudronnée. En partant à 8 h 10 min, il est arrivé au col à 9 h 40 min. À quelle vitesse moyenne a-t-il roulé ?

   Il a fait un trajet de 27 km en 90 minutes. Sa vitesse en km par minutes est de :

$$v_1 = \frac{27}{90}$$

   Soit en km par heure :

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{27}{90} \times 60 \\ &= 18 \text{ km.h}^{-1} \end{aligned}$$

2. Cette semaine il a pris la piste en terre. Il constate qu'il a mis 1 h 45 min pour effectuer ce trajet. De quel pourcentage sa vitesse moyenne a-t-elle diminué ?

   La durée du trajet en heures est :

$$1 + \frac{45}{60} = 1{,}75$$

Le trajet étant de 28 km sa vitesse moyenne en kilomètres par heure est :

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{28}{1{,}75} \\ &= 16 \text{ kp.h}^{-1} \end{aligned}$$

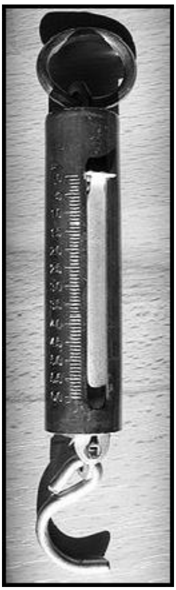
Le taux d'évolution en pourcentage de la vitesse est :

$$\frac{v_2 - v_1}{v_1} \times 100 \approx -11{,}11\%$$

Ainsi sa vitesse moyenne a diminué d'environ 11,11%.

Exercice 2.

Pour colorer l'émail des objets qu'il fabrique, un artisan utilise des oxydes métalliques. Pour peser certains de ces oxydes métalliques, il utilise un peson à ressort constitué d'un ressort, d'une réglette et d'un crochet pour accrocher les masses à mesurer.



Exemple de peson à ressort.
Source : Wikipédia

Le peson est suspendu par l'une de ses extrémités. Lorsqu'on y accroche une masse, son ressort s'allonge.

Au repos, le ressort du peson a pour longueur 14 cm.

Avec une masse de 10 g, le ressort a pour longueur 14,5 cm.
Chaque fois que l'on ajoute 10g à une masse déjà suspendue, le ressort s'allonge de 0,5cm.

On peut remarquer que la formule liant la masse m en grammes et la longueur l du ressort en centimètres est :

$$l = 14 + 0{,}5 \times \frac{m}{10}$$

Il s'en déduit :

$$m = \frac{10}{0{,}5}(l - 14)$$

1. Quelle longueur mesurera le ressort si on suspend une masse de 70 g ?

   En procédant à la division euclidienne :

   $$70 = 7 \times 10$$

   Donc le ressort mesurera :

   $$14 + 7 \times 0{,}5 = 17{,}5 \text{ cm}$$

2. L'artisan constate que le ressort mesure 28 cm. Quelle masse a-t-elle été suspendue au ressort ?

   Le ressort a été allongé de $28 - 14 = 14$ cm. Or : $14 = 28 \times 0{,}5$, donc on a ajouter 28 fois 10 grammes. La masse suspendue était de 280 grammes.

3. La longueur du ressort est-elle proportionnelle à la masse suspendue ? Justifier votre réponse.

   Il n'y a de proportionnalité car (on pourrait arguer d'une fonction affine qui n'est pas linéaire mais je préfère passer par un contre exemple) :

Masse	70	280
Longueur	17,5	28

   Or il n'y a pas de proportionnalité car :

   $$70 \times 28 - 17{,}5 \times 280 = -2940 \neq 0$$

Exercice 3.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes. Toutes les réponses devront être justifiées.

1. On considère un nombre rationnel $\frac{p}{q}$, où p et q sont des nombres entiers, q étant non nul.
   Ce nombre a pour valeur approchée par excès à 10^{-3} près 1,118.
   On sait de plus que $q = 1\,789$.
   Quelle(s) est (sont) la (les) valeur(s) possible(s) pour p ?

   * Interprétons les conditions données par l'énoncé.
   — Ce nombre a pour valeur approchée par excès à 1^{-3} près 1,118, donc :

   $$1{,}117 \leq fracpq \leq 1{,}118$$

   — On sait de plus que $q = 1789$, donc :

   $$1{,}117 \leq \frac{p}{1789} \leq 1{,}118$$

   De cet encadrement on déduit :

   $$1789 \times 1{,}117 \leq p \leq 1789 \times 1{,}118$$
   $$1998{,}313 \leq p \leq 2000{,}102$$

   Et puisque p est un entier :

   $$1999 \leq p \leq 2000$$

   * Réciproquement, si $p = 1999$ (respectivement $p = 2000$), alors $_{f}racp1789 \approx 1{,}11738$ (resp. $\frac{p}{1789} \approx 1{,}11794$). Autrement dit les deux valeurs possibles pour p sont 1999 et 2000.

2. L'objectif de cette question est d'établir un résultat pour la comparaison de deux nombres ayant pour écritures fractionnaires $\frac{n-1}{n}$ et $\frac{n}{n+1}$ où n est un nombre entier naturel non nul.

   (a) Comparer $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$; $\frac{12}{13}$ et $\frac{13}{14}$; $\frac{176}{177}$ et $\frac{177}{178}$. Quel résultat général peut-on conjecturer ?

   Comparer deux nombres c'est étudier le signe de leur différence.

*

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1 \times 2 - 2 \times 2}{2 \times 3} = -\frac{2}{6} < 0$$

Donc : $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$

* De même :

$$\frac{12}{13} - \frac{13}{14} = -\frac{1}{182} < 0$$

* De même :

$$\frac{176}{177} - \frac{177}{178} = -\frac{1}{31506} < 0$$

On peut conjecturer : $\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$.

(b) Démontrer ce résultat.

Soit n un entier naturel non nul.
L'inégalité proposée est successivement équivalente à :

$$\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$$

et ppuisque $n > 0$:

$$(n-1)(n+1) < n^2$$

en identifiant une identité remarquable :

$$n^2 - 1 < n^2$$

Or cette dernière inégalité est toujours vraie (quelque soit le n choisi), donc on a bien démontré que pour tout naturel non nu n :

$$\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$$

(c) Comparer les nombres $\frac{987\,654\,321}{987\,654\,322}$ et $\frac{987\,654\,322}{987\,654\,323}$ sans effectuer de calcul.

En appliquant ce résultat à l'exemple proposé :

$$\frac{987\,654\,321}{987\,654\,322} < \frac{987\,654\,322}{987\,654\,323}$$

Exercice 4.

On joue à un jeu nécessitant deux dés différents.

Le premier dé est un tétraèdre régulier à 4 faces ; une face est rouge, une est bleue et les deux autres sont jaunes.

Le deuxième est un dé cubique à 6 faces numérotées de 1 à 6.

On suppose les deux dés bien équilibrés.

On lance en premier le dé tétraédrique et on note la couleur de la face sur laquelle il repose.

Puis on lance le dé à 6 faces et on note le numéro porté sur la face de dessus.

1. Calculer la probabilité d'obtenir la couleur rouge sur le dé tétraédrique et 4 sur l'autre dé.

L'expérience aléatoire consiste à lancer deux dés et à noter les résultats obtenus. Les issues sont donc les couples formés d'une des quatre couleurs et d'un chiffre entre 1 et 6.

On peut représenter cette situation par un arbre ou un tableau. je choisis ici le tableau :

	1	2	3	4	5	6
R (rouge)	(R,1)	(R,2)	(R,3)	(R,4)	(R,5)	(R,6)
B (bleue)	(B,1)	(B,2)	(B,3)	(B,4)	(B,5)	(B,6)
J (jaune 1)	(J,1)	(J,2)	(J,3)	(J,4)	(J,5)	(J,6)
J (jaune 2)	(J,1)	(J,2)	(J,3)	(J,4)	(J,5)	(J,6)

Chacun des couples du tableau à la même probabilité de sortir : il y a équiprobabilité entre les issues. Il y a 24 issues, donc la probabilité d'une issue est $\frac{1}{24}$.

L'événement « obtenir la couleur rouge sur le dé tétraédrique et 4 sur l'autre dé » est réalisé par une seule issue donc sa probabilité est $\frac{1}{24}$.

2. Calculer la probabilité d'obtenir la couleur jaune sur le dé tétraédrique et un nombre impair sur l'autre dé.

   L'événement A : « obtenir la couleur jaune sur le dé tétraédrique et un nombre impair sur l'autre dé » est, d'après le tableau précédent, réalisé par 18 issues. Donc :

$$P(A) = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$