Lien vers le sujet seul : pdf.
Merci à Mme Gambier pour les corrections apportées.

Épreuve de mathématiques CRPE 2015 groupe 2.

I Première partie. 13 points

Partie A : réalisation d'un patron de la pyramide.

1. (a) Calculons DE.

   Le triangle DEH est rectangle en H, donc, d'après le théorème de Pythagore :
   $$HE^2 + HD^2 = DE^2.$$
   Donc, toutes les longueurs étant exprimées en centimètre :
   $$\begin{aligned} DE^2 &= 12^2 + 9^2 \\ &== 225 \end{aligned}$$
   Or, DE étant une longueur, c'est un nombre positif donc $DE = \sqrt{225}$.

   $$\boxed{DE = 15 \text{ cm.}}$$

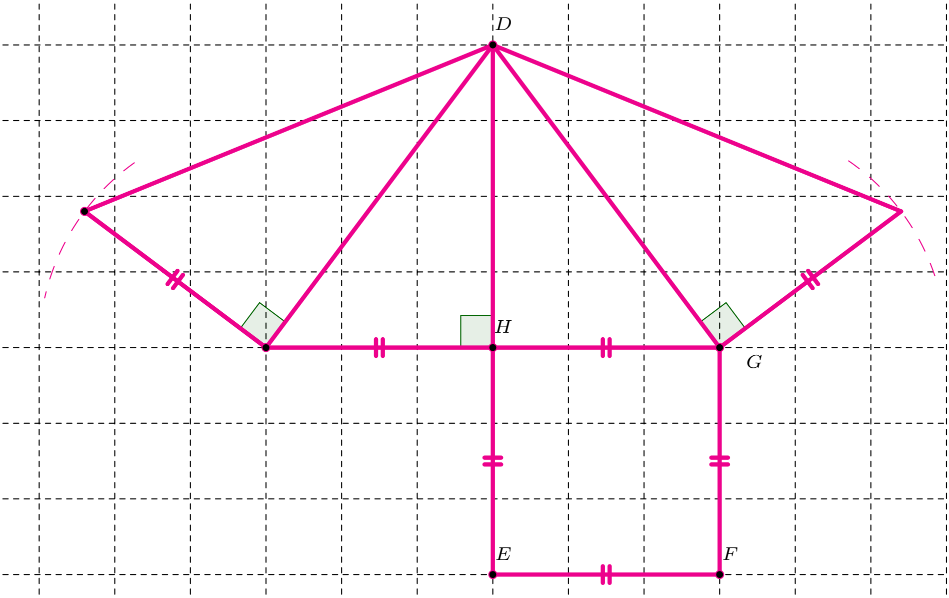
   Il est clair que, par symétrie (la base étant un carré), $DE = DG$ et donc

   $$\boxed{DG = 15 \text{ cm.}}$$

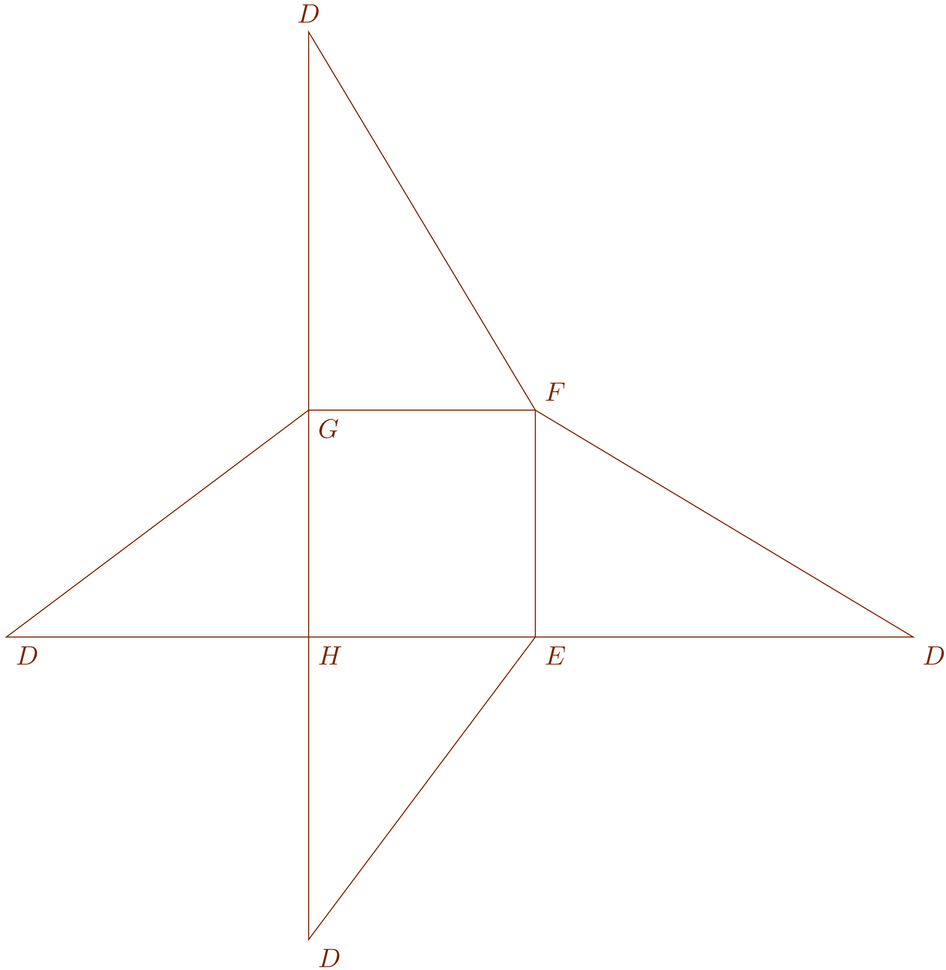
   (b) DGF est rectangle en G.
   DEF est rectangle en E.

2. Un patron à l'échelle $\frac{1}{3}$ en découpant trois des côtés de la base ($[EH]$, $[EF]$ et $[FG]$) et une arête menant au sommet ($[FD]$) :

   Cliquez sur l'image pour avoir la version dynamique.



Ou encore, la pyramide ouverte à partir du sommet D et vue du dessus :



Partie B : étude d'un cas particulier.

1. Nature du quadrilatère $JKLM$.

   On pense aux quadrilatères classiques à connaître. Les peu classiques : cerf-volant, croisé (nœud papillon), concave (pointe de flèche). Les très classiques en allant du général vers le particulier : trapèze, parallélogramme, rectangle et losange, carré.

   La pyramide $DJKLM$ est une réduction de la pyramide $DEFGH$, donc $JKLM$ est une réduction de $HEFG$. Or $HEFG$ est un carré donc

$JKLM$ est un carré.

2. Calculons JK.

On remarque une configuration de Thalès : les points D, K et E d'une part et D, J et H sont alignés dans cet ordre.
Les plans (JMK) et (HEG) sont parallèles et le plan (JKH) est sécant à ces deux derniers donc : $(JK)//(HE)$.
Il s'en déduit, de par le théorème de Thalès, que :

$$\frac{JK}{HE} = \frac{JD}{DH}.$$

D'où, les longueurs étant toutes exprimées en centimètres :

$$\begin{aligned} JK &= HE \times \frac{DH - JH}{DH} \\ &= 9 \times \left(1 - \frac{JH}{12}\right) \\ &= 9 \times \left(1 - \frac{2}{12}\right) \\ &= 7{,}5 \end{aligned}$$

$JK = 7{,}5$ cm.

Puisque, d'après la question précédente $JKLM$ est un carré $JK = JM$ et donc

$JM = 7{,}5$ cm.

3. Calculons $\mathscr{B}$.

Le volume de sable blanc est le volume de la pyramide $DJKLM$. Ainsi, les longueurs étant toutes exprimées en centimètre :

$$\begin{aligned} \mathscr{B} &= \frac{1}{3} \times JK^2 \times JD \\ &= \frac{1}{3} \times JK^2 \times (12 - JH) \\ &= 187{,}5 \end{aligned}$$

$$\mathscr{B} = 187{,}5 \text{ cm.}$$

Calculons $\mathscr{R}$.

Le volume de sable rouge est le volume de la pyramide $DHEFG$ auquel on ôte le volume occupé par le sable blanc :

$$\begin{aligned}\mathscr{R} &= \frac{1}{3} \times HE^2 \times DH - \mathscr{B}\\ &= \frac{1}{3} \times (9 \text{ cm})^2 \times (12 \text{ cm}) - 187{,}5 \text{ cm}^3\\ &= \left(\frac{1}{3} \times 9^2 \times 12 - 187{,}5\right) \text{ cm}^3\end{aligned}$$

$$\mathscr{R} = 136{,}5 \text{ cm.}$$

Partie C : étude du cas général.

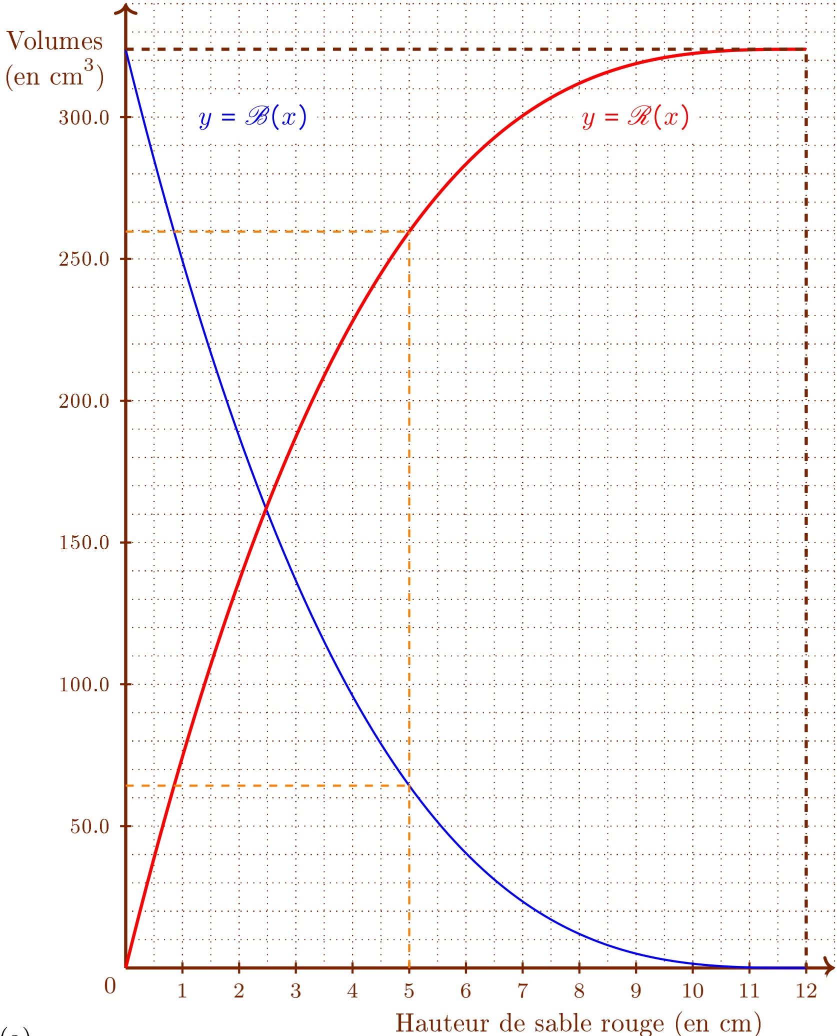
1. Déterminons l'ensemble des valeurs possibles pour x.

   Dans cette partie il s'agit de construire une fonction dont x sera la variable. Du point de vue de cette fonction nous recherchons son ensemble de définition.

$$\left.\begin{array}{l} x = JH \\ DH = 12 \\ J \in [DH] \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leq x \leq 12.$$

   Autrement dit nécessairement :

$$x \in [0\ ;\ 12].$$

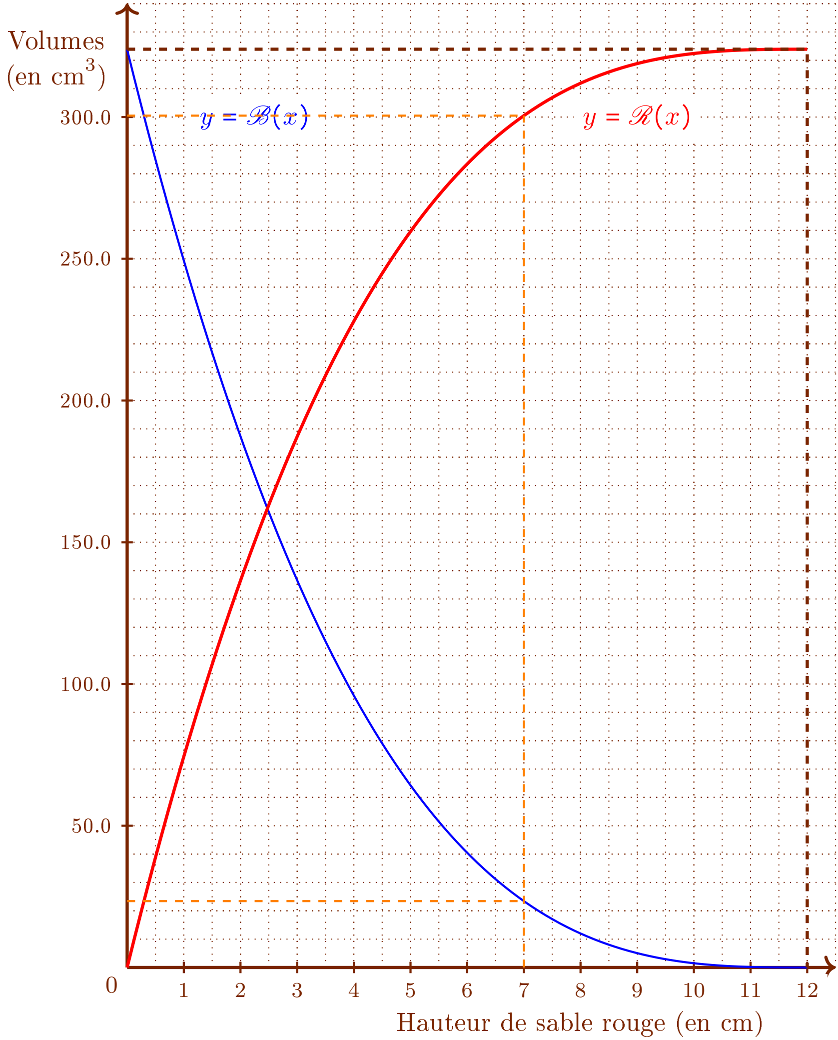


2. (a)

Par lecture graphique :

$$\boxed{\mathscr{B}(5) = 65 \text{ cm}^3 \text{ et } \mathscr{R}(5) = 260 \text{ cm}^3.}$$

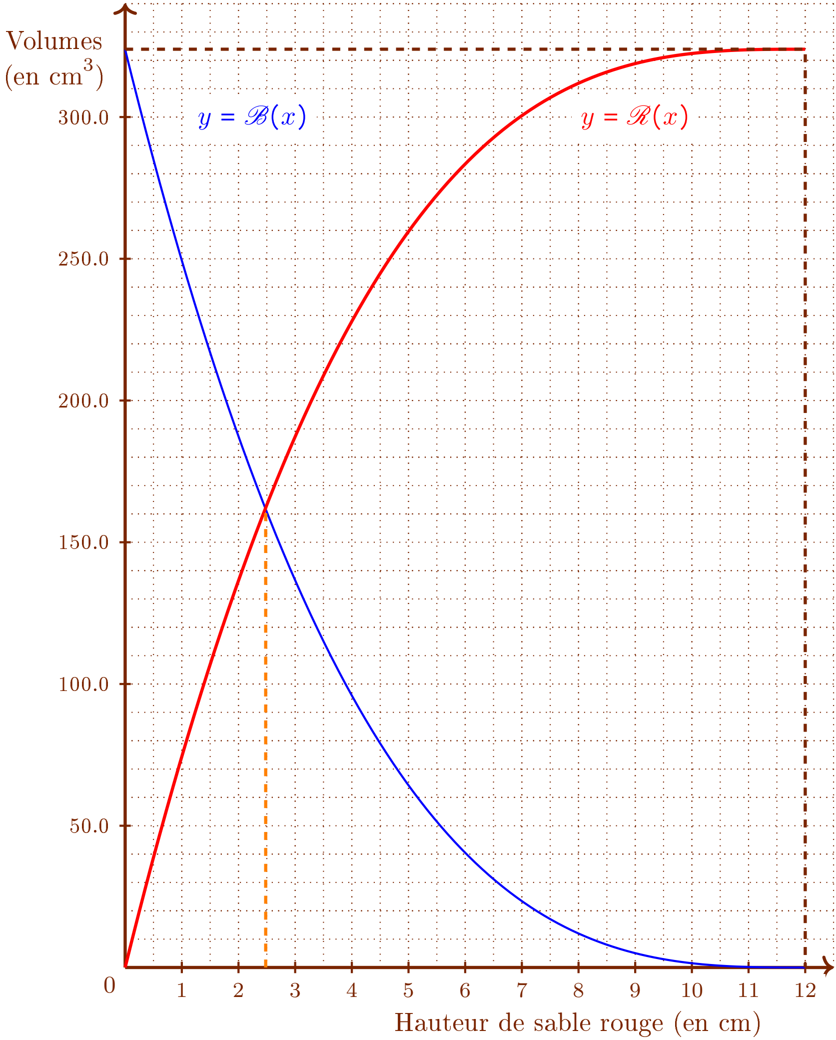
(b) Si la hauteur de sable est 5 cm alors la hauteur de sable rouge est $(12\text{cm}) - (5 \text{ cm}) = 7$ cm.



Par lecture graphique :

$$\mathscr{B}(7) = 24 \text{ cm}^3 \text{ et } \mathscr{R}(7) = 300 \text{ cm}^3.$$

(c) Déterminons un encadrement de la hauteur, h_0, de sable rouge pour laquelle les volumes des deux sables sont égaux.



Les volumes sont égaux lorsque la hauteur de sable rouge est environ 2,5 cm. Donc un encadrement au centimètre près de la hauteur, h_0, de sable rouge pour laquelle les volumes des deux sables sont égaux est :

$$\boxed{2 \leq h_0 \leq 3.}$$

3. (a) Déterminons $\mathscr{B}(x)$.

Soit $x \in [0; 12]$.

On a montré dans la partie B question 2 que :

$$\begin{aligned} JK &= 9 \times \left(1 - \frac{JH}{12}\right) \\ &= \frac{9}{12}(12 - x) \end{aligned}$$

Dans la même partie **B** la question 3 a été l'occasion de démontrer que :

$$\mathscr{B}(x) = \frac{1}{3} \times JK^2 \times (12 - JH)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathscr{B}(x) &= \frac{1}{3}\left[\frac{9}{12}(12 - x)\right]^2 (12 - x) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{9}{12}\right)(12 - x)^3 \end{aligned}$$

Nous avons bien :

$$\boxed{\mathscr{B}(x) = 0{,}1875(12 - x)^3.}$$

(b) Calculons $\mathscr{B}(5)$.

En utilisant l'expression algébrique obtenue à la question précédente :

$$\mathscr{B}(5) = 0{,}1875(12 - 5)^3$$

$$\boxed{64{,}312\,5 \text{ cm}^3.}$$

Calculons $\mathscr{R}(5)$.

Comme $\mathscr{R} = 324 - \mathscr{B}$:

$$\mathscr{R}(5) = 324 - 64{,}312\,5$$

$$\boxed{\mathscr{R}(5) = 259{,}687\,5 \text{ cm}^3.}$$

II Deuxième partie. 13 points

Exercice 1.

Déterminons le coût C de la fuite.

* On admet qu'il s'agit de 10 jours pleins c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} 10\text{j} &= 10 \times 24 \text{ h} \\ &= 240 \text{ h} \\ &= 240 \times 60 \text{ min} \\ &== 14\,400 \text{ min} \end{aligned}$$

* À raison de 3 litres par minutes le volume d'eau écoulé est :

$$3 \times 14400 = 43200 \text{ L}.$$

Autrement dit, puisque 1 L = 1 dm^3, ce volume est :

$$\begin{aligned} 43200 \text{ L} &= 43200 \text{ dm}^3 \\ &= 43200 \times \frac{1}{1000} \text{ m}^3 \\ &= 43{,}2 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

* Le coût étant de 3,5 euro par litre cela représente un coût total de :

$$C = 3{,}5 \times 43{,}2$$

$$\boxed{C = 151{,}2 \text{ €}.}$$

Exercice 2.

Modélisons l'expérience.

L'univers de l'expérience aléatoire est constitué des couples de nombres affichés sur les dés. Chacun de ces couples à la même probabilité de sortir : il y a équiprobabilité. L'univers comportant $6 \times 6 = 36$ issues chaque issue a une probabilité de $\frac{1}{36}$.

Comme ce n'est pas l'expérience elle-même qui nous intéresse mais un nombre associé.

Calculons $\mathbb{P}(X = 5)$ et $\mathbb{P}(X = 7)$.

Construisons une variable aléatoire, X, en associant à chaque couple la somme des termes. L'ensemble des valeurs prises par X peut être représenté par le tableau :

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

L'événement $\{X = 5\}$ est réalisé par 4 issues donc : $\mathbb{P}(X = 5) = \frac{5}{36}$.
L'événement $\{X = 7\}$ est réalisé par 6 issues donc : $\mathbb{P}(X = 7) = \frac{6}{36}$.

L'affirmation de Simon est fausse ; il y a plus de chance d'obtenir une somme égale à 7 qu'une somme égale à 5.

Exercice 3.

Déterminons le salaire, r, en euro de la nouvelle recrue pour que le salaire moyen des hommes et femmes soit le même.

* Le salaire moyen des hommes est :

$$\overline{x} = \frac{1250 + 1400 + 1600 + 3200}{4} = 1862{,}5.$$

* Le salaire moyen des femmes est :

$$\overline{y} = \frac{3 \times 1700 + r}{4}$$

* Les salaires moyens des hommes et des femmes seront égaux si et seulement si r vérifie :

$$\frac{3 \times 1700 + r}{4} = 1862{,}5$$

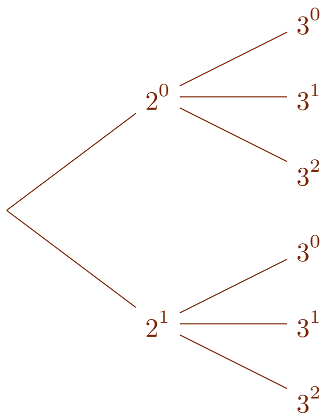
C'est une équation de degré 1 que nous résolvons en isolant l'inconnue.

$$\frac{3\times 1700+r}{4}\times 4 = 1862{,}5\times 4$$
$$3\times 1700+r = 7450$$

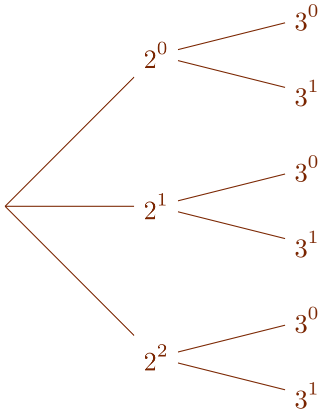
Exercice 4.

Déterminons le nombre de bouquets qu'il est possible de constituer.

* On veut le même nombre de roses dans tous les bouquets. Donc le nombre de roses, x dans un bouquets est un diviseur de 18. Autrement dit x est nécessairement dans $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 6\ ;\ 9\ ;\ 18\}$.
En effet puisque $18 = 2\times 3^2$ est la décomposition en facteurs premiers de 18 nous pouvons retrouver l'ensemble des diviseurs de 18 grâce à un arbre :



* On veut le même nombre de tulipes dans tous les bouquets. Donc le nombre de tulipes, y dans un bouquets est un diviseur de 12. Autrement dit est nécessairement dans $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 12\}$.
En effet puisque $12 = 2^2\times 3$ est la décomposition en facteurs premiers de 12 nous pouvons retrouver l'ensemble des diviseurs de 12 grâce à un arbre :



* Le nombre de bouquets est donc a choisir dans $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 6\ ;\ 9\ ;\ 18\} \cap \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 6;\ 12\} = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 6\}$.

* Réciproquement :

- si l'on fait des 1 bouquets il y aura dans chaque bouquet 12 tulipes et 18 roses.
- si l'on fait des 2 bouquets il y aura dans chaque bouquet 6 tulipes et 9 roses.
- si l'on fait des 3 bouquets il y aura dans chaque bouquet 4 tulipes et 6 roses.
- si l'on fait des 6 bouquets il y aura dans chaque bouquet 2 tulipes et 3 roses.

Il est possible de faire 1, 2, 3 ou 6 bouquets.

III Troisième partie. 14 points

Situation 1.

1.
2. (a)
   (b)
   (c)
3.

Situation 2.

1.
2. (a)
   (b)

Situation 3.

1.

2.