Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.
Merci à Mme Gambier pour les corrections apportées.

Durée : 4 heures.
Épreuve notée sur 40.

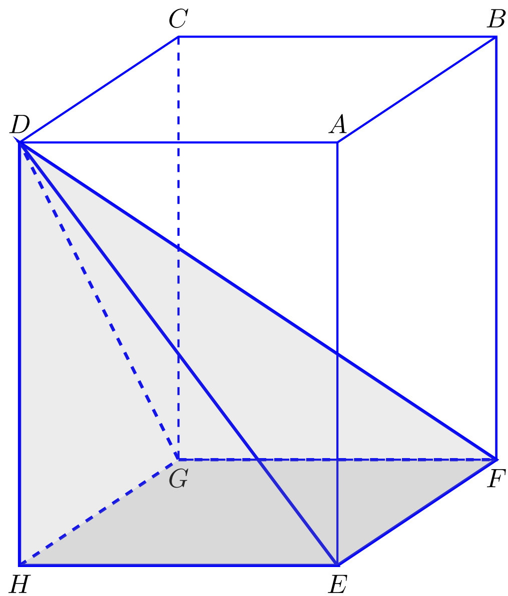
Épreuve de mathématiques CRPE 2015 groupe 2.

I Première partie. 13 points

L'objet de ce problème est l'étude d'une pyramide en verre, destinée à être remplie de sable pour constituer un objet de décoration.

Cette pyramide est inscriptible dans un pavé droit, comme indiqué sur la figure ci-dessous.

Le pavé droit a pour dimensions : 9 cm de longueur, 9 cm de largeur et 12 cm de hauteur.



*Les parties **B.** et **C.** sont indépendantes de la partie **A.***

Partie A : réalisation d'un patron de la pyramide.

1. (a) Calculer les longueurs DE et DG.

Calculons DE.

Le triangle DEH est rectangle en H, donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$HE^2 + HD^2 = DE^2.$$

Donc, toutes les longueurs étant exprimées en centimètre :

$$\begin{aligned} DE^2 &= 12^2 + 9^2 \\ &== 225 \end{aligned}$$

Or, DE étant une longueur, c'est un nombre positif donc $DE = \sqrt{225}$.

$$\boxed{DE = 15 \text{ cm.}}$$

Il est clair que, par symétrie (la base étant un carré), $DE = DG$ et donc

$$\boxed{DG = 15 \text{ cm.}}$$

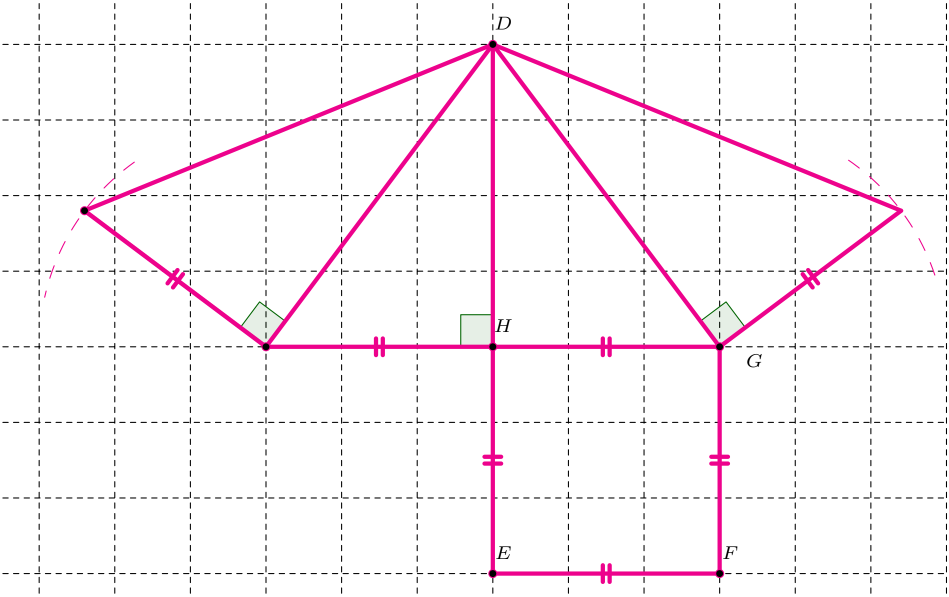
(b) Quelle est la nature du triangle DGF ? Du triangle DEF ? (On ne demande pas de justification.)

DGF est rectangle en G. DEF est rectangle en E.

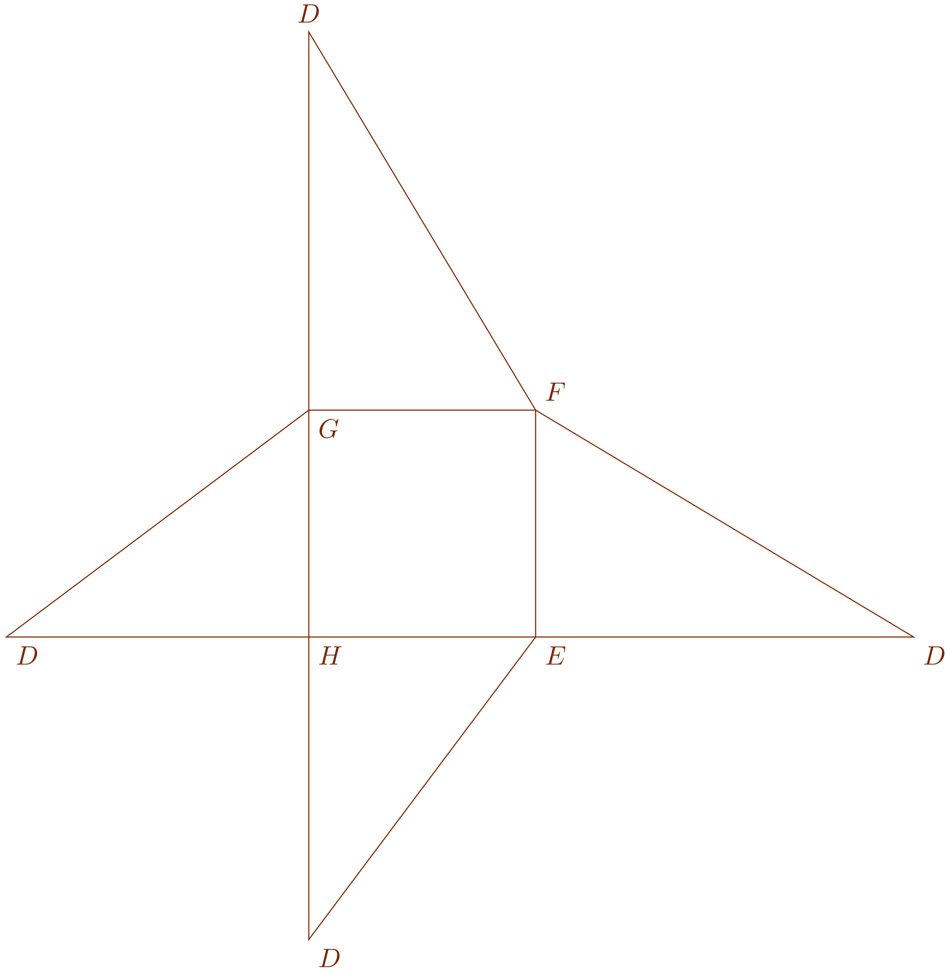
2. Tracer sur la copie (sans justification) un patron de cette pyramide à l'échelle 1/3.

Un patron à l'échelle $\frac{1}{3}$ en découpant trois des côtés de la base ([EH], [EF] et [FG]) et une arête menant au sommet ([FD]) :

Cliquez sur l'image pour avoir la version dynamique.



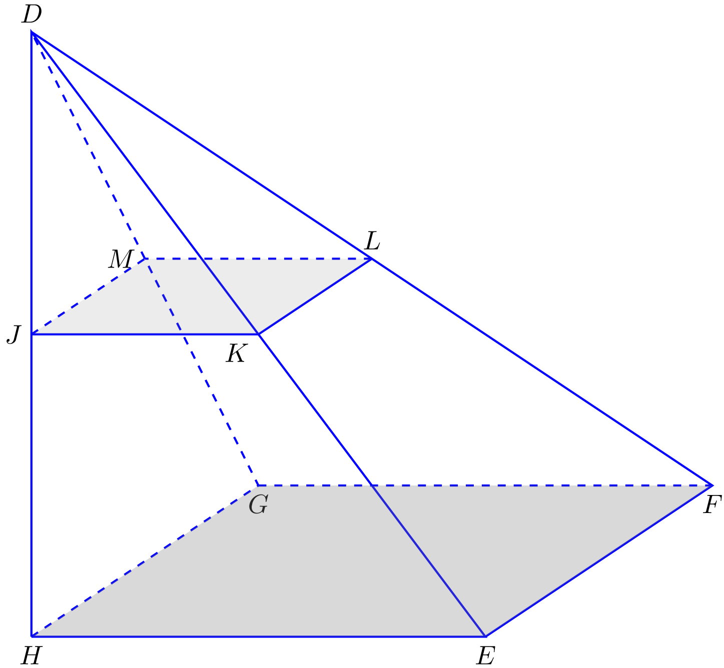
Ou encore, la pyramide ouverte à partir du sommet D et vue du dessus :



La pyramide est remplie avec du sable de deux couleurs différentes : la partie inférieure avec du sable rouge et la partie supérieure avec du sable blanc.

Sur la figure ci-dessous, le point J indique la hauteur à laquelle s'arrête le sable rouge ; les deux couleurs de sable sont délimitées par le plan parallèle à la base de la pyramide $DEFGH$ passant par le point J. La section est un quadrilatère $JKLM$ où les points K, L, M appartiennent respectivement aux segments $[DE]$, $[DF]$ et $[DG]$.

La pyramide $DJKLM$ est une réduction de la pyramide $DEFGH$.



Partie B : étude d'un cas particulier.

Dans cette partie, on donne $JH = 2$ cm.

1. Quelle est la nature du quadrilatère $JKLM$? Justifier.

   Nature du quadrilatère $JKLM$.

   On pense aux quadrilatères classiques à connaître. Les peu classiques : cerf-volant, croisé (nœud papillon), concave (pointe de flèche). Les très classiques en allant du général vers le particulier : trapèze, parallélogramme, rectangle et losange, carré.

   La pyramide $DJKLM$ est une réduction de la pyramide $DEFGH$, donc $JKLM$ est une réduction de $HEFG$. Or $HEFG$ est un carré donc

   $JKLM$ est un carré.

2. Calculer les longueurs JK et JM en justifiant les calculs.

Calculons JK.

On remarque une configuration de Thalès : les points D, K et E d'une part et D, J et H sont alignés dans cet ordre.
Les plans (JMK) et (HEG) sont parallèles et le plan (JKH) est sécant à ces deux derniers donc : $(JK)//(HE)$.
Il s'en déduit, de par le théorème de Thalès, que :

$$\frac{JK}{HE} = \frac{JD}{DH}.$$

D'où, les longueurs étant toutes exprimées en centimètres :

$$\begin{aligned} JK &= HE \times \frac{DH - JH}{DH} \\ &= 9 \times \left(1 - \frac{JH}{12}\right) \\ &= 9 \times \left(1 - \frac{2}{12}\right) \\ &= 7{,}5 \end{aligned}$$

$$\boxed{JK = 7{,}5 \text{ cm.}}$$

Puisque, d'après la question précédente $JKLM$ est un carré $JK = JM$ et donc

$$\boxed{JM = 7{,}5 \text{ cm.}}$$

3. Déterminer le volume $\mathscr{B}$ de sable blanc et le volume $\mathscr{R}$ de sable rouge contenus dans la pyramide.

Rappel : volume d'une pyramide = $\frac{1}{3} \times$ aire de la base $\times$ hauteur

Calculons $\mathscr{B}$.

Le volume de sable blanc est le volume de la pyramide $DJKLM$. Ainsi, les longueurs étant toutes exprimées en centimètre :

$$\begin{aligned}\mathscr{B} &= \frac{1}{3} \times JK^2 \times JD \\ &= \frac{1}{3} \times JK^2 \times (12 - JH) \\ &= 187{,}5\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{B} = 187{,}5 \text{ cm.}}$$

Calculons $\mathscr{R}$.

Le volume de sable rouge est le volume de la pyramide $DHEFG$ auquel on ôte le volume occupé par le sable blanc :

$$\begin{aligned}\mathscr{R} &= \frac{1}{3} \times HE^2 \times DH - \mathscr{B} \\ &= \frac{1}{3} \times (9 \text{ cm})^2 \times (12 \text{ cm}) - 187{,}5 \text{ cm}^3 \\ &= \left(\frac{1}{3} \times 9^2 \times 12 - 187{,}5\right) \text{ cm}^3\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{R} = 136{,}5 \text{ cm.}}$$

Partie C : étude du cas général.

Dans cette partie la hauteur JH de sable rouge est variable. On note x cette hauteur, exprimée en centimètre, et respectivement $B(x)$ et $R(x)$ les volumes de sable blanc et de sable rouge contenus dans la pyramide, exprimés en fonction de x et en centimètre cube.

1. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?

Déterminons l'ensemble des valeurs possibles pour x.

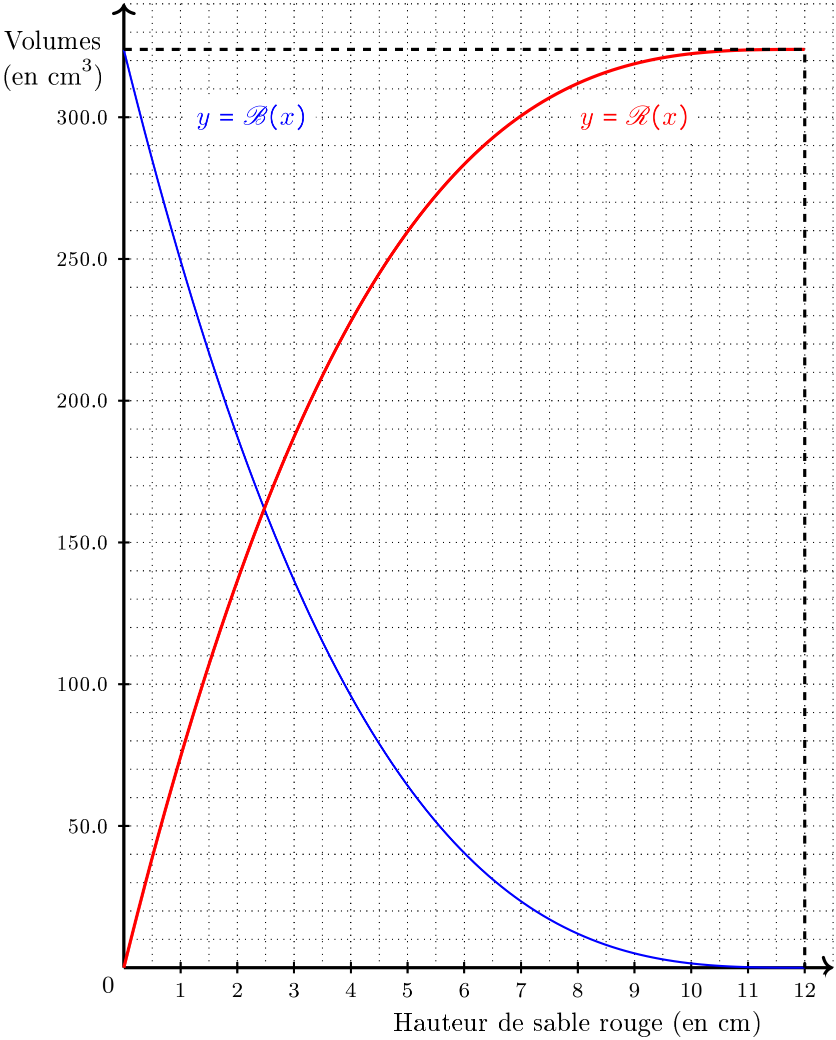
Dans cette partie il s'agit de construire une fonction dont x sera la variable. Du point de vue de cette fonction nous recherchons son ensemble de définition.

$$\left.\begin{array}{l} x = JH \\ DH = 12 \\ J \in [DH] \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leq x \leq 12.$$

Autrement dit nécessairement :

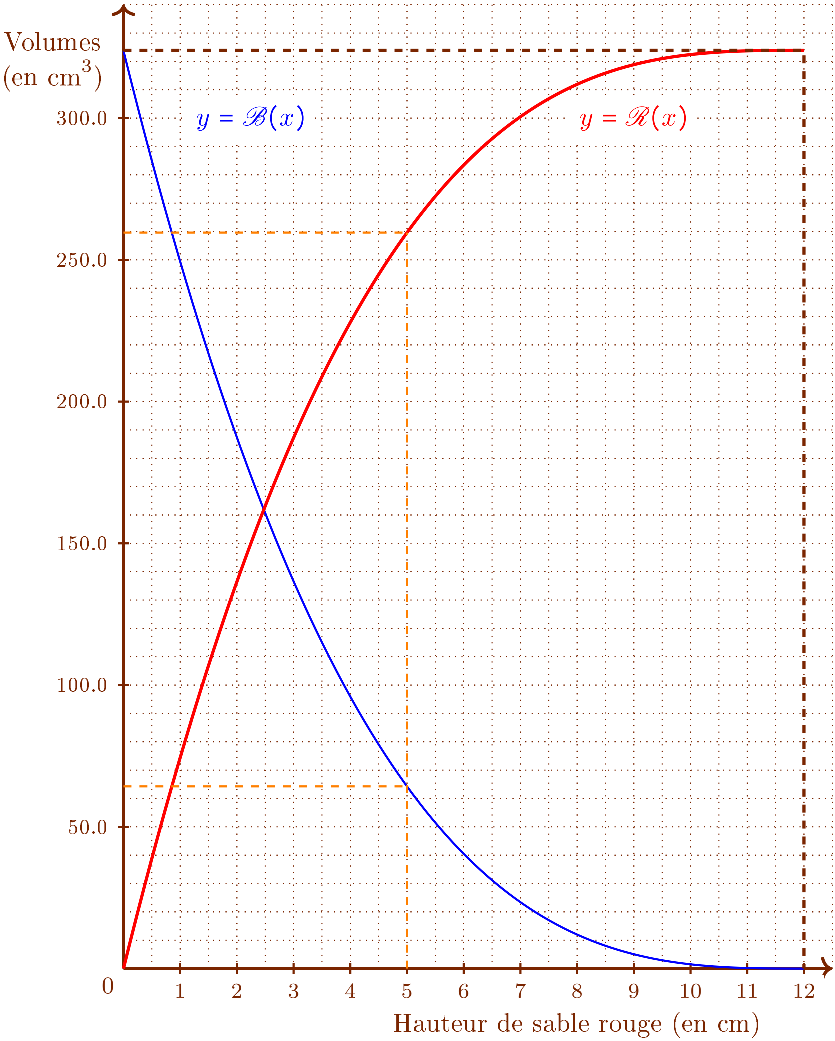
$$x \in [0\ ;\ 12].$$

2. On a tracé ci-après les représentations graphiques des fonctions $\mathscr{B}$ et $\mathscr{R}$ dans un repère du plan :



En utilisant ce graphique, répondre aux questions suivantes :

(a) Si la hauteur de sable rouge est 5 cm, quels sont les volumes respectifs de sable blanc et de sable rouge dans la pyramide ?

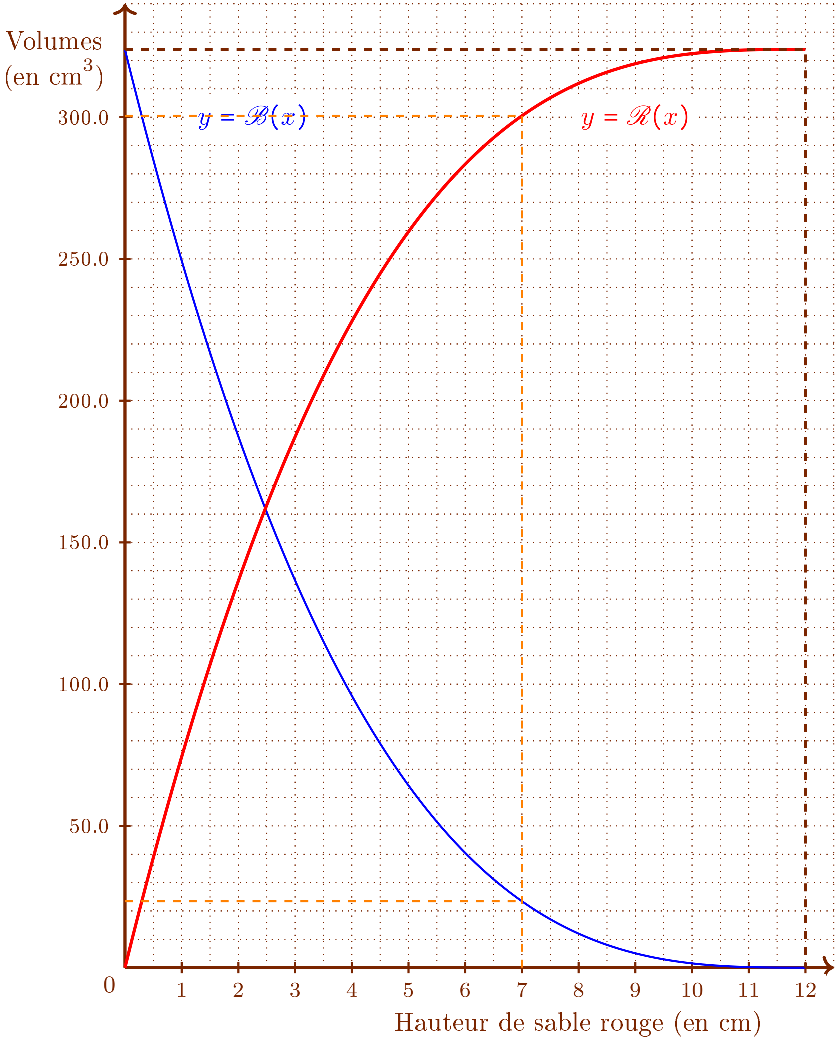


Par lecture graphique :

$$\mathscr{B}(5) = 65 \text{ cm}^3 \text{ et } \mathscr{R}(5) = 260 \text{ cm}^3.$$

(b) Si la hauteur de sable blanc est 5 cm, quels sont les volumes de sable blanc et de sable rouge dans la pyramide ?

Si la hauteur de sable est 5 cm alors la hauteur de sable rouge est (12cm) − (5 cm) = 7 cm.

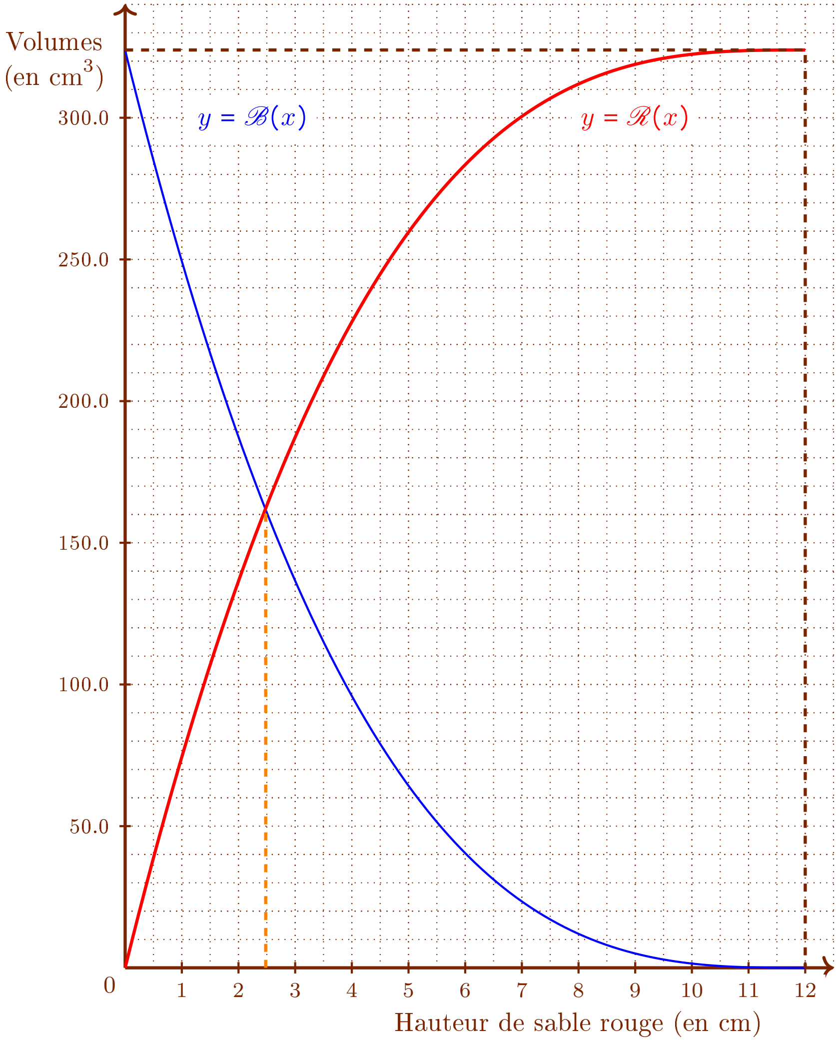


Par lecture graphique :

$$\mathscr{B}(7) = 24 \text{ cm}^3 \text{ et } \mathscr{R}(7) = 300 \text{ cm}^3.$$

(c) Donner un encadrement au centimètre près de la hauteur de sable rouge pour laquelle les volumes des deux sables sont égaux.

Déterminons un encadrement de la hauteur, h_0, de sable rouge pour laquelle les volumes des deux sables sont égaux.



Les volumes sont égaux lorsque la hauteur de sable rouge est environ 2,5 cm. Donc un encadrement au centimètre près de la hauteur, h_0, de sable rouge pour laquelle les volumes des deux sables sont égaux est :

$$2 \leq h_0 \leq 3.$$

3. (a) Montrer que $\mathscr{B}(x) = 0{,}1875(12 - x)^3$.

Déterminons $\mathscr{B}(x)$.

Soit $x \in [0; 12]$.
On a montré dans la partie B question 2 que :

$$\begin{aligned} JK &= 9 \times \left(1 - \frac{JH}{12}\right) \\ &= \frac{9}{12}(12 - x) \end{aligned}$$

Dans la même partie **B** la question 3 a été l'occasion de démontrer que :

$$\mathscr{B}(x) = \frac{1}{3} \times JK^2 \times (12 - JH)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathscr{B}(x) &= \frac{1}{3}\left[\frac{9}{12}(12 - x)\right]^2 (12 - x) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{9}{12}\right)(12 - x)^3 \end{aligned}$$

Nous avons bien :

$$\boxed{\mathscr{B}(x) = 0{,}1875(12 - x)^3.}$$

(b) En déduire les valeurs exactes des réponses aux questions **C**.2.(a).

Calculons $\mathscr{B}(5)$.

En utilisant l'expression algébrique obtenue à la question précédente :

$$\mathscr{B}(5) = 0{,}1875(12 - 5)^3$$

$$\boxed{64{,}312\,5 \text{ cm}^3.}$$

Calculons $\mathscr{R}(5)$.

Comme $\mathscr{R} = 324 - \mathscr{B}$:

$$\mathscr{R}(5) = 324 - 64{,}3125$$

$$\boxed{\mathscr{R}(5) = 259{,}6875 \text{ cm}^3.}$$

II Deuxième partie. 13 points

Cette partie est constituée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1.

D'après le manuel « Triangles 3e » (éditions Hatier)

Carole, partie en vacances 10 jours, a laissé le robinet du lavabo de la salle de bain entrouvert. Le débit de ce robinet était 3 litres par minute (L/min).

Dans la ville où habite Carole, le prix moyen de l'eau est 3,50 € le m^3.

Calculer les conséquences financières de la négligence de Carole.

Déterminons le coût C de la fuite.

* On admet qu'il s'agit de 10 jours pleins c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} 10\text{j} &= 10 \times 24 \text{ h} \\ &= 240 \text{ h} \\ &= 240 \times 60 \text{ min} \\ &== 14\,400 \text{ min} \end{aligned}$$

* À raison de 3 litres par minutes le volume d'eau écoulé est :

$$3 \times 14400 = 43200 \text{ L.}$$

Autrement dit, puisque 1 L = 1 dm^3, ce volume est :

$$\begin{aligned} 43200 \text{ L} &= 43200 \text{ dm}^3 \\ &= 43200 \times \frac{1}{1000} \text{ m}^3 \\ &= 43{,}2 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

* Le coût étant de 3,5 euro par litre cela représente un coût total de :

$$C = 3{,}5 \times 43{,}2$$

$$\boxed{C = 151{,}2 \text{ €}.}$$

Exercice 2.

Simon lance deux dés équilibrés à six faces, numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6, puis il additionne les deux nombres obtenus. Il prétend qu'il a autant de chances d'obtenir une somme égale à 7, qu'une somme égale à 5. Est-ce exact ?

Modélisons l'expérience.

L'univers de l'expérience aléatoire est constitué des couples de nombres affichés sur les dés. Chacun de ces couples à la même probabilité de sortir : il y a équiprobabilité. L'univers comportant $6 \times 6 = 36$ issues chaque issue a une probabilité de $\frac{1}{36}$.

Comme ce n'est pas l'expérience elle-même qui nous intéresse mais un nombre associé.

Calculons $\mathbb{P}(X = 5)$ et $\mathbb{P}(X = 7)$.

Construisons une variable aléatoire, X, en associant à chaque couple la somme des termes. L'ensemble des valeurs prises par X peut être représenté par le tableau :

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

L'événement $\{X = 5\}$ est réalisé par 4 issues donc : $\mathbb{P}(X = 5) = \frac{5}{36}$.
L'événement $\{X = 7\}$ est réalisé par 6 issues donc : $\mathbb{P}(X = 7) = \frac{6}{36}$.

L'affirmation de Simon est fausse ; il y a plus de chance d'obtenir une somme égale à 7 qu'une somme égale à 5.

Exercice 3.

Une petite entreprise emploie 7 personnes, dont 3 femmes.
Voici quelques informations sur le salaire mensuel des personnels :

Salaires des hommes : 1 250 € ; 1 400 € ; 1 600 € ; 3 200 €

Salaires des femmes : salaire médian : 1 875 € ; salaire moyen : 1 700 € ; étendue des salaires : 1 000 €

Le patron de l'entreprise veut embaucher une femme supplémentaire pour respecter la parité.
Calculer le salaire qu'il doit verser à cette nouvelle recrue pour que les salaires moyens des hommes et des femmes soient égaux.

Déterminons le salaire, r, en euro de la nouvelle recrue pour que le salaire moyen des hommes et femmes soit le même.

* Le salaire moyen des hommes est :

$$\overline{x} = \frac{1250 + 1400 + 1600 + 3200}{4} = 1862{,}5.$$

* Le salaire moyen des femmes est :

$$\overline{y} = \frac{3 \times 1700 + r}{4}$$

* Les salaires moyens des hommes et des femmes seront égaux si et seulement si r vérifie :

$$\frac{3 \times 1700 + r}{4} = 1862{,}5$$

C'est une équation de degré 1 que nous résolvons en isolant l'inconnue.

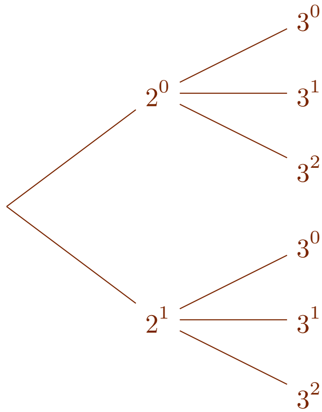
$$\frac{3 \times 1700 + r}{4} \times 4 = 1862{,}5 \times 4$$
$$3 \times 1700 + r = 7450$$

Exercice 4.

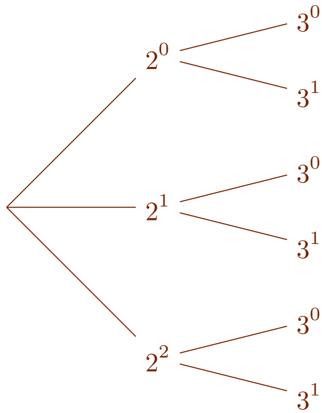
Un fleuriste reçoit 12 tulipes et 18 roses pour faire des bouquets. Il souhaite utiliser toutes ses fleurs et composer des bouquets identiques (même nombre de roses et même nombre de tulipes). Quelles sont ses différentes possibilités ?

Déterminons le nombre de bouquets qu'il est possible de constituer.

* On veut le même nombre de roses dans tous les bouquets. Donc le nombre de roses, x dans un bouquets est un diviseur de 18. Autrement dit x est nécessairement dans $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 6\ ;\ 9\ ;\ 18\}$.
  En effet puisque $18 = 2 \times 3^2$ est la décomposition en facteurs premiers de 18 nous pouvons retrouver l'ensemble des diviseurs de 18 grâce à un arbre :



* On veut le même nombre de tulipes dans tous les bouquets. Donc le nombre de tulipes, y dans un bouquets est un diviseur de 12. Autrement dit est nécessairement dans $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 12\}$.
  En effet puisque $12 = 2^2 \times 3$ est la décomposition en facteurs premiers de 12 nous pouvons retrouver l'ensemble des diviseurs de 12 grâce à un arbre :



* Le nombre de bouquets est donc a choisir dans $\{1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18\} \cap \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6; 12\} = \{1 ; 2 ; 3 ; 6\}$.
* Réciproquement :
  — si l'on fait des 1 bouquets il y aura dans chaque bouquet 12 tulipes et 18 roses.
  — si l'on fait des 2 bouquets il y aura dans chaque bouquet 6 tulipes et 9 roses.
  — si l'on fait des 3 bouquets il y aura dans chaque bouquet 4 tulipes et 6 roses.
  — si l'on fait des 6 bouquets il y aura dans chaque bouquet 2 tulipes et 3 roses.

Il est possible de faire 1, 2, 3 ou 6 bouquets.

III Troisième partie. 14 points

Cette partie est constituée de trois situations indépendantes.

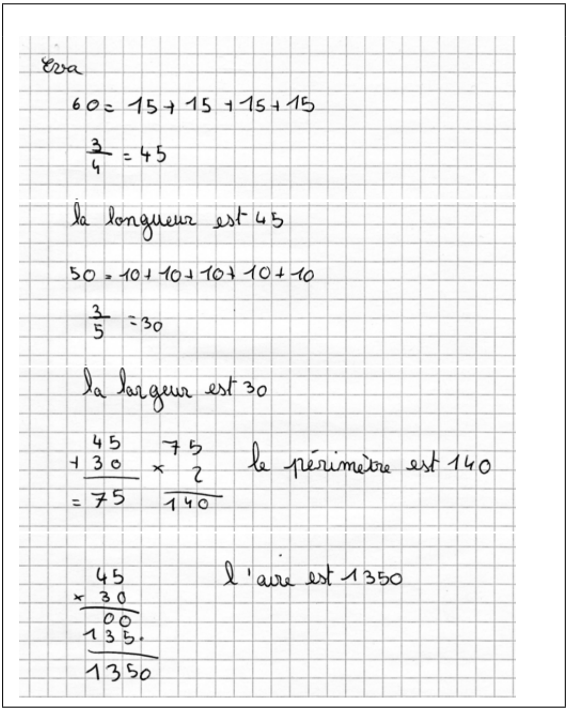
Situation 1.

Le problème ci-dessous a été donné à des élèves de cycle 3 en activité de recherche.

Dans une plaque de carton rectangulaire de largeur 50 cm et de longueur 60 cm, on découpe un rectangle dont la largeur est $\frac{3}{5}$ de la largeur de la plaque et la longueur est $\frac{3}{4}$ de la longueur de la plaque.
Calcule le périmètre et l'aire du rectangle obtenu.

1. Dans cet exercice, les fractions apparaissent-elles comme des nombres ou comme des opérateurs ? justifier.

2. Le problème a été proposé à trois élèves, dont les productions sont données ci-dessous :



Eva

60 = 15 + 15 + 15 + 15

$\frac{3}{4}$ = 45

la longueur est 45

50 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10

$\frac{3}{5}$ = 30

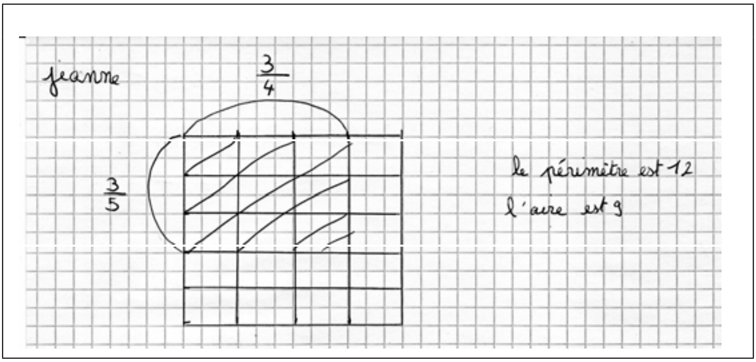
la largeur est 30

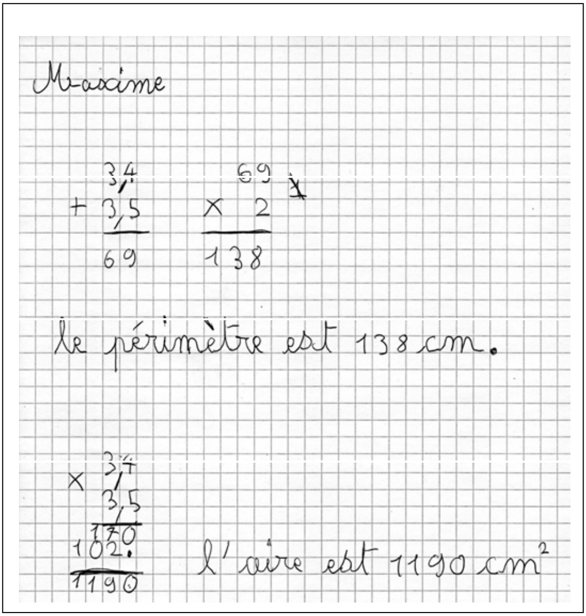
$$\begin{array}{r} 45 \\ +\ 30 \\ \hline =\ 75 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 75 \\ \times\ 2 \\ \hline 140 \end{array}$$

le périmètre est 140

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times\ 30 \\ \hline 00 \\ 135\cdot \\ \hline 1350 \end{array}$$

l'aire est 1350





(a) Pour chacun de ces trois élèves, donner deux compétences qui semblent acquises dans le domaine grandeurs et mesures.

(b) Analyse de la production d'Eva : en quoi témoigne-t-elle d'une bonne compréhension de la notion de fraction malgré une erreur d'écriture ?

(c) Analyse de la production de Maxime : en quoi son erreur d'écriture est-elle révélatrice d'une mauvaise compréhension de la notion de fraction ?

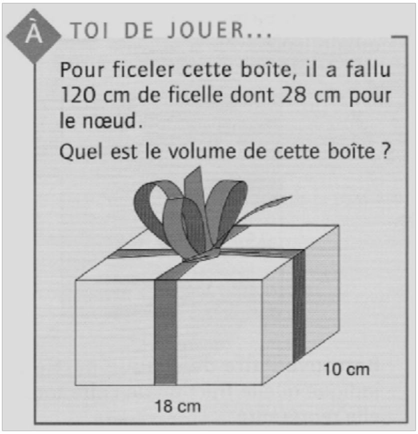
3. En préparant cette activité, le professeur a hésité entre trois couples de dimensions pour le rectangle de carton :

- 50 cm de largeur et 60 cm de longueur (dimensions finalement retenues) ;
- 10 cm de largeur et 16 cm de longueur ;
- 10 cm de largeur et 14 cm de longueur.

Argumenter l'intérêt et les difficultés éventuelles pour chacune de ces options.

Situation 2.

L'exercice ci-dessous est proposé à des élèves d'une classe de CM2.



À TOI DE JOUER...

Pour ficeler cette boîte, il a fallu 120 cm de ficelle dont 28 cm pour le nœud.

Quel est le volume de cette boîte ?

(Extrait de « Vivre les maths CM2, Nathan, Programme 2008 »).

1. Citer deux pré-requis dans le domaine de la géométrie nécessaires pour résoudre cet exercice.

2. Un élève propose la solution suivante :

   $120 - 28 = 92$

   $2 \times 18 = 36$

   $2 \times 10 = 20$

   $36 + 20 = 56$

   $92 - 56 = 36 \div 2 = 18$

   La hauteur de la boîte est de 18 cm.

   (a) Retrouver les différentes étapes de son raisonnement, en analysant ses résultats partiels.

   (b) Relever ses éventuelles erreurs ou oublis.

Situation 3.

Lis le problème.

Emma et Maxime vendent des crêpes pour la kermesse de l'école.
5 crêpes coûtent 7 €.
10 crêpes coûtent donc 14 €.
Combien coûtent 15 crêpes ?

(Extrait de « Vivre les maths CM2, Nathan, Programme 2008 »)

1. Quelle est la principale notion du programme sur laquelle cet exercice permet de revenir ?

2. Proposer trois méthodes possibles pour résoudre cet exercice en cycle 3, et pour chacune, expliciter les propriétés relatives à cette notion qui ont été mobilisées.