CRPE 2015 épreuve de mathématiques groupement académique 1.

Première partie : problème. 13 points

A : Calcul de l'aire d'un polygone de Pick sur un exemple.

On décompose le polygone en un carré et deux triangles et on peut ainsi calculer l'aire :

$$\mathcal{A}(ABCDEF) = \mathcal{A}(ABF) + \mathcal{A}(DEF) + \mathcal{A}(BCDF)$$

Calculons chacune des aires.

Pour le triangle ABF la longueur de la hauteur issue de A est facilement lisible. Si on note H le pied de la hauteur issue de A :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(ABF) &= \frac{AH \times BF}{2}\\ &= \frac{4 \times 5}{2}\\ &= 10\ u.a.\end{aligned}$$

Le triangle DEF est rectangle en F donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(DEF) &= \frac{FD \times FE}{2}\\ &= \frac{5 \times 5}{2}\\ &= \frac{25}{2}\ u.a.\end{aligned}$$

Et pour le carré :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(BCDF) &= BC \times CD\\ &= 5 \times 5\\ &= 25\ u.a.\end{aligned}$$

on somme les aires (disjointes) :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(ABCDEF) &= 10 + \frac{25}{2} + 25 \\ &= \frac{95}{2}\ u.a.\end{aligned}$$

B : Utilisation de la formule de Pick sur un exemple.

1. Nous lisons sur le dessin :
$$\begin{cases} i = 37 \\ b = 23 \end{cases}$$
Donc :
$$i + \frac{b}{2} - 1 = \frac{95}{2}$$
On retrouve bien l'aire obtenue dans la partie A.

2. * Vérifions la formule de Pick pour $ABCDF$.
$$\begin{cases} i = 27 \\ b = 18 \end{cases}$$
Donc :
$$i + \frac{b}{2} - 1 = 35$$
   * Vérifions la formule de Pick pour DEF.
$$\begin{cases} i = 6 \\ b = 15 \end{cases}$$
Donc :
$$i + \frac{b}{2} - 1 = \frac{25}{2}$$

C : Quelques conséquences de la formule de Pick.

1. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe deux entiers naturels i et b, avec b pair, tels que l'aire du polygone soit 7,5.
Donc il existe une entier naturel b_1 tel que : $b = 2b_1$.
Et l'égalité suivante est vérifiée :
$$i + \frac{b}{2} - 1 = 7{,}5$$

Ce qui équivaut à :

$$i + b_1 = 6{,}5$$

Ce qui est impossible puisque la somme de deux entiers naturels est encore un entier naturel (ou $(\mathbb{Z},+)$ est un groupe abélien).
Ainsi nous avons montré par l'absurde qu'il ne peut y avoir de polygone de Pick d'aire 7,5 avec b.

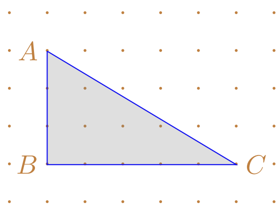
2. Si le polygone de Pick a une aire 7,5, alors :

$$i + \frac{b}{2} - 1 = 7{,}5$$
$$2i + b = 17$$

Et comme i est positif :

$$b \leq 17$$

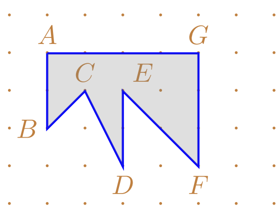
Voici un exemple de polygone de Pick d'aire 7,5 :



3. On suppose :

$$i + \frac{b}{2} - 1 = 7{,}5$$

Si de plus $i = 1$, alors $b = 2 \times 7{,}5 = 15$.
Voici un tel polygone de Pick :



4. Soit $\mathcal{A}$ l'aire d'un polygone de Pick. On a :

$$i + \frac{b}{2} - 1 = \mathcal{A}$$

Comme i est positif :

$$\begin{aligned}\frac{b}{2} - 1 &\leq \mathcal{A}\\ \frac{b}{2} &\leq \mathcal{A} + 1\\ b &\leq 2\mathcal{A} + 2\end{aligned}$$

Le nombre maximal de points sur le bord d'un polygone de Pick est d'aire $\mathcal{A}$ est $2\mathcal{A} + 2$.

D : Démonstration de la formule de Pick dans le cas d'un rectangle.

1. On compte sur chaque côté le nombre de points sauf le dernier ce qui donne L points pour les longueurs et l points pour les largeurs. Le nombre de points sur le bord est donc :

$$b = 2L + 2l$$

Le nombre de points intérieurs est le produits du nombre de points intérieurs en largeur, $l - 1$, par le nombre de points extérieurs en hauteur, $L - 1$. Ainsi :

$$i = (L - 1)(l - 1)$$

2. L'aire du rectangle est :

$$\mathcal{A} = L \times l$$

Or :

$$\begin{aligned}(L-1)(l-1) + \frac{2L + 2l}{2} - 1 &= L \times l - L - l + 1 + L + l - 1\\ &= L \times l\\ &= \mathcal{A}\end{aligned}$$

donc :

$$\mathcal{A} = i + \frac{b}{2} - 1$$

Deuxième partie.

Exercice 1.

Procédons par conditions nécessaire et suffisante, en commençant par des conditions nécessaires.

1. La décomposition de A en facteurs premiers fournit :
$$111 = 3 \times 37$$
Donc : $A \in \{3\ ,\ 37,\ 111\}$.
2. B est le cube d'un nombre entier et B est un nombre entier positif, donc : $\exists r \in \mathbb{N},\ r^3 = B$.
3. $A - B$ est un nombre entier positif ou nul, donc $B \leq 111$. Ainsi $r^3 \leq 111$. Ou encore : $r \leq \sqrt[3]{111}$ et donc $r \leq 4$. Ainsi : $\sqrt[3]{B} \in [\![0;4]\!]$
4. Faisons apparaître dans un tableau les valeurs possibles pour $A - B$ en tenant compte des conditions nécessaires précédemment trouvées :

	0	1	8	27	64
3	3	2	-5	-24	-61
37	37	36	29	10	-27
111	111	110	103	84	47

Comme $A - B$ est un positif on peut exclure toutes les valeurs négatives. Comme $A - B$ est divisible par 10 : $A - B \in \{10,\ 110\}$.

Vérifions que ces conditions sont suffisantes.

1. Si $(A,B) = (37,27)$, alors :
   * 111 est un multiple du nombre entier positif 37.
   * $37 - 27$ est un nombre entier positif ou nul divisible par 10.
   * $27 = 3^3$ est le cube d'un entier.
2. Si $(A,B) = (111,1)$, alors :
   * 111 est un multiple du nombre entier positif 111.
   * $111 - 1$ est un nombre entier positif ou nul divisible par 10.
   * $1 = 1^3$ est le cube d'un entier.

On a donc démontré par conditions nécessaire et suffisante que l'ensemble des valeurs possibles pour le couple (A,B) est $\{(37,27),\ (111,1)\}$.

Exercice 2.

1. Notons f le fonction qui à un volume d'eau liquide associe le volume de glace correspondant. Par lecture graphique l'image de 7 est $f(7) = 7{,}5$.

2. L'antécédent de 9 par f est, par lecture graphique, 8,3.

3. La courbe représentative de f est une droite passant par l'origine du repère donc il s'agit de la courbe représentative d'une fonction affine. Autrement dit le volume de glace est proportionnel au volume d'eau liquide.

4. Le pourcentage d'évolution du volume d'eau entre les états liquides et solides est :

$$\begin{aligned} p &= \frac{10{,}8 - 10}{10} \times 100 \\ &= 8\% \end{aligned}$$

Le volume d'eau augmente de 8% en gelant.

5. Le volume d'eau liquide nécessaire pour 30 jours est (en m^3) :

$$\begin{aligned} V_l(30) &= 30 \times 20 \\ &= 600 \end{aligned}$$

Ce qui avant fonte, et d'après la question précédente, correspondait à volume de glace (en m^3) de :

$$\begin{aligned} V_g &= \left(1 + \frac{8}{100}\right) \times V_l(30) \\ &= 648 \end{aligned}$$

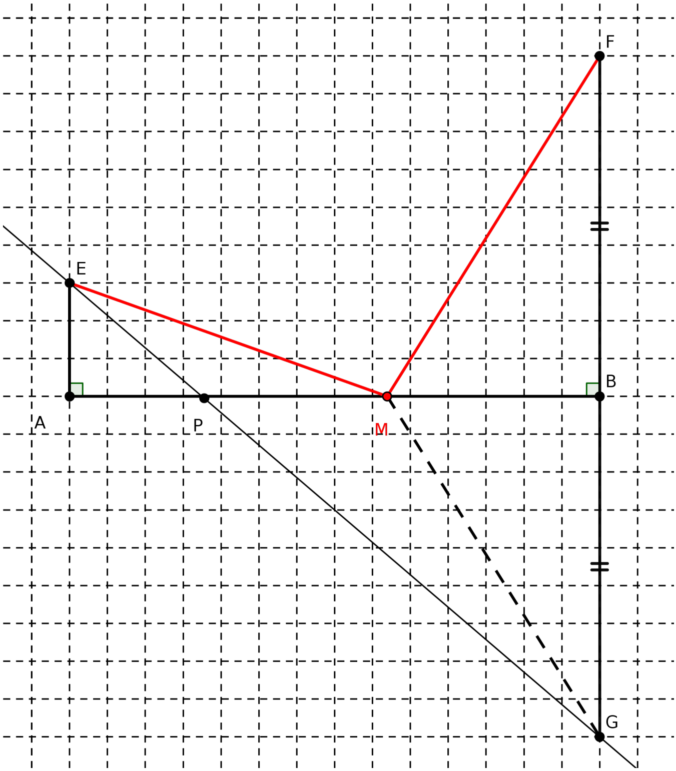
Et donc en litres ($1\ \text{L} = 1\ \text{dm}^3 = \frac{1}{1000}\ \text{m}^3$) :

$$\begin{aligned} V_g &= 1\,000 \times 648 \\ &= 648\,000 \end{aligned}$$

Finalement le volume d'eau fourni par la ville de Lyon pour 30 jours de nettoyage correspond à 648 000 L de glace.

Exercice 3.

1. Voici la figure à l'échelle un demi, pour l'avoir en taille réelle et en version dynamique cliquez sur l'image.



2. D'après l'inégalité triangulaire :

$$EM + MG \geq EG$$

Comme E, G et P sont alignés : $EG = EP + PG$. Donc on peut réécrire l'inégalité triangulaire :

$$EM + MG \geq EP + PG$$

On en déduit que EG est un minorant de $EM + MG$. Comme se minorant est atteint pour $M = P$, il s'agit d'un minimum.
Autrement dit $EM + MF$ est minimale lorsque M et placé en P.

3. (a) Remarquons une configuration de Thalès :
   — Les points E, P et G sont alignés dans cet ordre.
   — Les points A, P et B sont alignés dans cet ordre.
   Comme de plus $(AE)//(BG)$, car $(AE) \perp (AB)$ et $(AB \perp (BG)$, le théorème de Thalès permet d'affirmer que :
   $$\frac{AP}{PB} = \frac{AE}{BG}$$
   Autrement dit :
   $$\frac{AP}{14 - AP} = \frac{3}{9}$$
   (b) De la précédente égalité se déduisent les égalités :
   $$3AP = 14 - AP$$
   $$4AP = 14$$
   $$AP = \frac{7}{4}$$

4. * Calculons EP en usant du théorème de Pythagore. Le triangle AEP est rectangle en A, donc, d'après le théorème de Pythagore :
   $$AE^2 + AP^2 = EP^2$$
   On en déduit :
   $$EP^2 = 3^3 + \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{193}{16}$$
   Donc : $EP = \sqrt{\frac{193}{16}}$ ou $EP = -\sqrt{\frac{193}{16}}$. Et comme EP est une longueur, donc positive, nécessairement $EP = \frac{\sqrt{193}}{4}$.
   * la longueur PG se calcule de la même façon :
   $$PG = \sqrt{\left(\frac{49}{4}\right)^2 + 9^2} = \frac{\sqrt{3\,697}}{4}$$
   * Donc en centimètre :
   $$EG = \frac{\sqrt{1\,945}}{2\sqrt{2}}$$
   Ou en arrondissant au dixième :
   $$EG \approx 15{,}6$$