# Épreuve de mathématiques CRPE 2015 groupe 1.

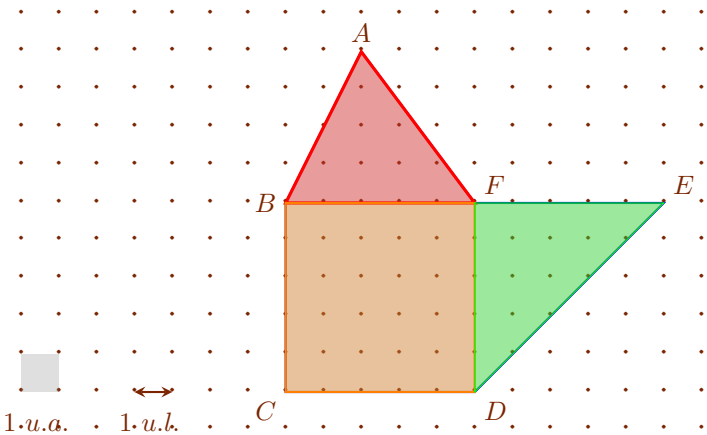
Lien vers le sujet seul : pdf.

## I Première partie : problème. 13 points

### A : Calcul de l'aire d'un polygone de Pick sur un exemple.

Calculons l'aire $\mathcal{A}(ABCDEF)$ du polygone $ABCDEF$.

On décompose le polygone en un carré et deux triangles et on peut ainsi calculer l'aire :




$$\mathcal{A}(ABCDEF) = \mathcal{A}(ABF) + \mathcal{A}(DEF) + \mathcal{A}(BCDF)$$

Calculons chacune des aires.

Pour le triangle $ABF$ la longueur de la hauteur issue de $A$ est facilement lisible. Si on note $H$ le pied de la hauteur issue de $A$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(ABF) &= \frac{AH \times BF}{2}\\ &= \frac{4 \times 5}{2}\\ &= 10\ u.a.\end{aligned}$$

Le triangle $DEF$ est rectangle en $F$ donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(DEF) &= \frac{FD \times FE}{2}\\ &= \frac{5 \times 5}{2}\\ &= \frac{25}{2}\ u.a.\end{aligned}$$

Et pour le carré :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(BCDF) &= BC \times CD\\ &= 5 \times 5\\ &= 25\ u.a.\end{aligned}$$

on somme les aires (disjointes) :

$$\mathcal{A}(ABCDEF) = 10 + \frac{25}{2} + 25$$

$$\boxed{\mathcal{A}(ABCDEF) = \tfrac{95}{2}\ u.a..}$$

**B : Utilisation de la formule de Pick sur un exemple.**

1. Nous lisons sur le dessin :

$$\begin{cases} i = 37 \\ b = 23 \end{cases}$$

   Donc :

$$i + \frac{b}{2} - 1 = \frac{95}{2}$$

   On retrouve bien l'aire obtenue dans la partie A.

2. * Vérifions la formule de Pick pour $ABCDF$.

$$\begin{cases} i = 27 \\ b = 18 \end{cases}$$

   Donc :

$$i + \frac{b}{2} - 1 = 35.$$

* Vérifions la formule de Pick pour $DEF$.

$$\begin{cases} i = 6 \\ b = 15 \end{cases}$$

Donc :

$$i + \frac{b}{2} - 1 = \frac{25}{2}.$$

* Nous en déduisons par sommation (les surfaces étant disjointes) l'aire de $ABCDEF$ :

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(ABCDEF) &= 35 + \frac{25}{2} \\ &= \frac{95}{2} \end{aligned}$$

Nous retrouvons bien le résultat de la question B.1.

**C : Quelques conséquences de la formule de Pick.**

1. Démontrons qu'il ne peut y avoir de polygone de Pick d'aire 7,5 avec $b$ pair en raisonnant par l'absurde.

   Supposons qu'il existe deux entiers naturels $i$ et $b$, avec $b$ pair, tels que l'aire du polygone soit 7,5 et démontrons que cela conduit nécessairement à une contradiction.

   Puisque $b$ est pair il existe une entier naturel $b_1$ tel que : $b = 2b_1$.
   L'aire étant de 7,5, d'après la formule de Pick nous avons :

$$i + \frac{b}{2} - 1 = 7{,}5$$

   Ce qui équivaut à :

$$i + b_1 = 8{,}5$$

   Ce qui est impossible puisque la somme de deux entiers naturels est encore un entier naturel (ou $(\mathbb{Z},+)$ est un groupe).
   Ainsi

nous avons montré par l'absurde qu'il ne peut y avoir de polygone de Pick d'aire 7,5 avec $b$.

2. Déterminons le maximum de $b$.

Nous faisons la démonstration en deux étapes : d'abord s'assurer que $b$ est inférieur à 17 puis qu'il existe au moins un polygone pour lequel $b = 17$.

* Si le polygone de Pick a une aire 7,5, alors nous avons successivement :

$$\begin{aligned} i + \frac{b}{2} - 1 &= 7{,}5 \\ 2\times\left(i + \frac{b}{2} - 1\right) &= 2\times 7{,}5 \\ 2\times i + 2\times\frac{b}{2} - 2\times 2 &= 15 \\ 2i + b - 2 + 2 &= 15 + 2 \\ 2i + b &= 17 \end{aligned}$$

Et comme $i$ est positif :

$$b \leqslant 17$$

Ainsi la valeur de $b$ ne peut pas excéder 17. 17 est un majorant de $b$. Il nous reste à vérifier que nous pouvons effectivement trouver un polygone pour lequel $b = 17$.

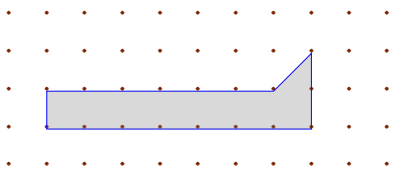
* Nous souhaitons dessiner un polygone de Pick d'aire 7,5 et pour lequel $b = 17$ donc :

$$i + \frac{17}{2} - 1 = 7{,}5$$

ce qui équivaut sucessivement à :

$$\begin{aligned} i + 7{,}5 &= 7{,}5 \\ i &= 0 \end{aligned}$$

Nous devons dessiner un polygone de Pick ne contenant aucun point et passant par 17 points.
Voici un exemple de polygone de Pick d'aire 7,5 pour lequel $b = 17$ :



Ainsi il existe bien un polygone d'aire 7,5 pour lequel $b = 17$.

La valeur maximale de $b$ lorsque le polygone a une aire de 7,5 est 17.

3. * La formule de Pick pour un polygone d'aire 7,5 :

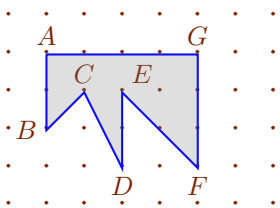
$$i + \frac{b}{2} - 1 = 7{,}5.$$

Si le polygone ne contient qu'un point alors $i = 1$, et donc

$$\begin{aligned} 1 + \frac{b}{2} - 1 &= 7{,}5 \\ \frac{b}{2} &= 7{,}5 \\ 2\times\frac{b}{2} &= 2\times 7{,}5 \\ b &= 15 \end{aligned}$$

Nécessairement $b = 15$.

* Voici un polygone de Pick tel que décrit dans l'énoncé :




4. Démontrons que la valeur maximale de $b$ est $2\mathcal{A} + 2$.

* On a la formule de Pick :

$$i + \frac{b}{2} - 1 = \mathcal{A}$$

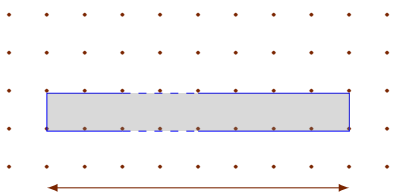
Comme $i$ est positif :

$$\begin{aligned} \frac{b}{2} - 1 &\leqslant \mathcal{A} \\ \frac{b}{2} &\leqslant \mathcal{A} + 1 \\ 2\times\frac{b}{2} &\leqslant 2\times(\mathcal{A} + 1) \\ b &\leqslant 2\mathcal{A} + 2 \end{aligned}$$

Le nombre maximal de points sur le bord d'un polygone de Pick est d'aire $\mathcal{A}$ est $2\mathcal{A} + 2$.

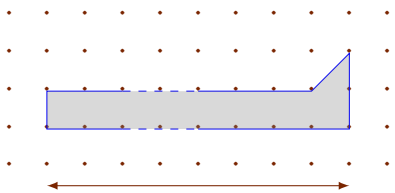
* Vérifions qu'il est possible de trouver un polygone d'aire $\mathcal{A}$ tel que $b = 2\mathcal{A} + 2$.
Si $b = 2\mathcal{A} + 2$ alors $i = 0$ ce qui nous permet de deviner la forme que doit nécessairement avoir le polygone.

- Si $\mathcal{A}$ est un entier alors voici un polygone qui convient :



$\mathcal{A}$ unités de longueur

- Si $\mathcal{A}$ est n'est pas un entier alors voici un polygone qui convient :



$\mathcal{A}$ unités de longueur

**D : Démonstration de la formule de Pick dans le cas d'un rectangle.**

1. On compte sur chaque côté du rectangle le nombre de points sauf le dernier ce qui donne $L$ points pour les longueurs et $l$ points pour les largeurs. Le nombre de points sur le bord est donc :

$$b = 2L + 2l.$$

Le nombre de points intérieurs est le produits du nombre de points intérieurs en largeur, $l-1$, par le nombre de points extérieurs en hauteur, $L-1$. Ainsi :

$$i = (L-1)(l-1).$$

2. Vérifions que la formule convient.

$$\begin{aligned} i + \frac{b}{2} - 1 &= (L-1)(l-1) + \frac{2L+2l}{2} - 1 \\ &= L \times l - L - l + 1 + L + l - 1 \\ &= L \times l \\ &= \mathcal{A} \end{aligned}$$

donc :

l'aire du rectangle vérifie bien : $\mathcal{A} = i + \frac{b}{2} - 1$.

## II Deuxième partie. 13 points

**Exercice 1.**

Déterminons toutes les valeurs possibles pour $A$ et $B$ en par conditions nécessaire et suffisante.

* Conditions nécessaires.

- La décomposition de $A$ en facteurs premiers fournit :

$$111 = 3 \times 37,$$

donc :

$$A \in \{1, 3\ , 37, 111\}.$$

- $B$ est le cube d'un nombre entier et $B$ est un nombre entier positif, donc : $\exists r \in \mathbb{N}$, $r^3 = B$.

  $A - B$ est un nombre entier positif ou nul, donc $B \leq 111$. Ainsi $r^3 \leqslant 111$. Ou encore : $r \leq \sqrt[3]{111}$ et donc $r \leqslant 4$. Ainsi : $B \in \{0, 1, 8, 27, 64\}$.

- Faisons apparaître dans un tableau les valeurs possibles pour $A - B$ en tenant compte des conditions nécessaires précédemment trouvées :

| | 0 | 1 | 8 | 27 | 64 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | -7 | -26 | -63 |
| 3 | 3 | 2 | -5 | -24 | -61 |
| 37 | 37 | 36 | 29 | 10 | -27 |
| 111 | 111 | 110 | 103 | 84 | 47 |

  Comme $A - B$ est divisible par 10 : $A - B \in \{10, 110\}$.

* Vérifions que ces conditions sont suffisantes pour les deux couples possibles.

- Si $(A,B) = (37,27)$, alors :

  . 111 est un multiple du nombre entier positif 37.

  . $37 - 27$ est un nombre entier positif ou nul divisible par 10.

  . $27 = 3^3$ est le cube d'un entier.

- Si $(A,B) = (111,1)$, alors :

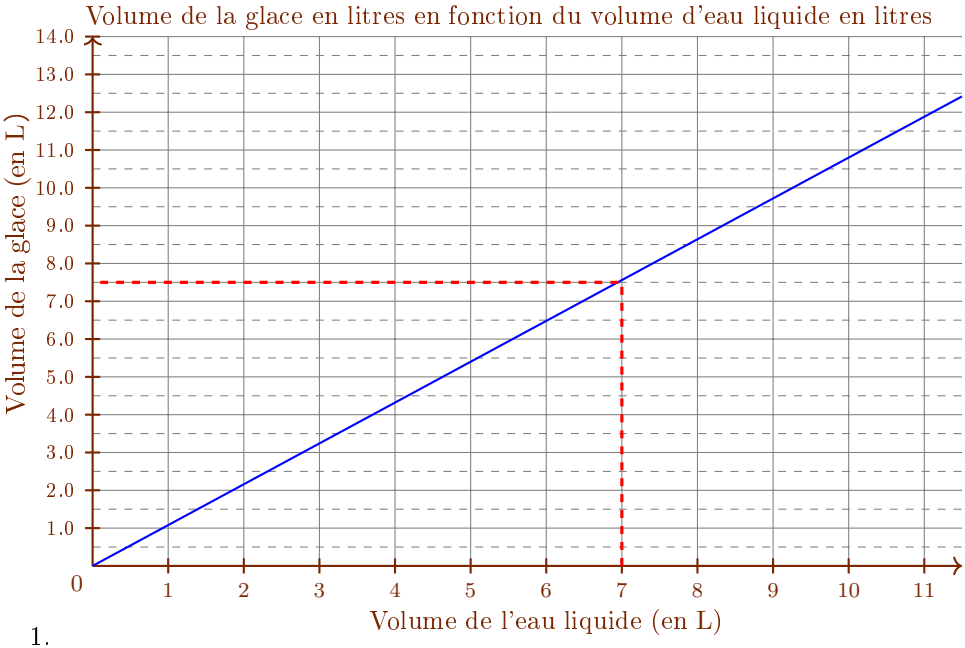
  . 111 est un multiple du nombre entier positif 111.

  . $111 - 1$ est un nombre entier positif ou nul divisible par 10.

  . $1 = 1^3$ est le cube d'un entier.

On a donc démontré par conditions nécessaire et suffisante que l'ensemble des valeurs possibles pour le couple $(A,B)$ est $\{(37,27), (111,1)\}$.

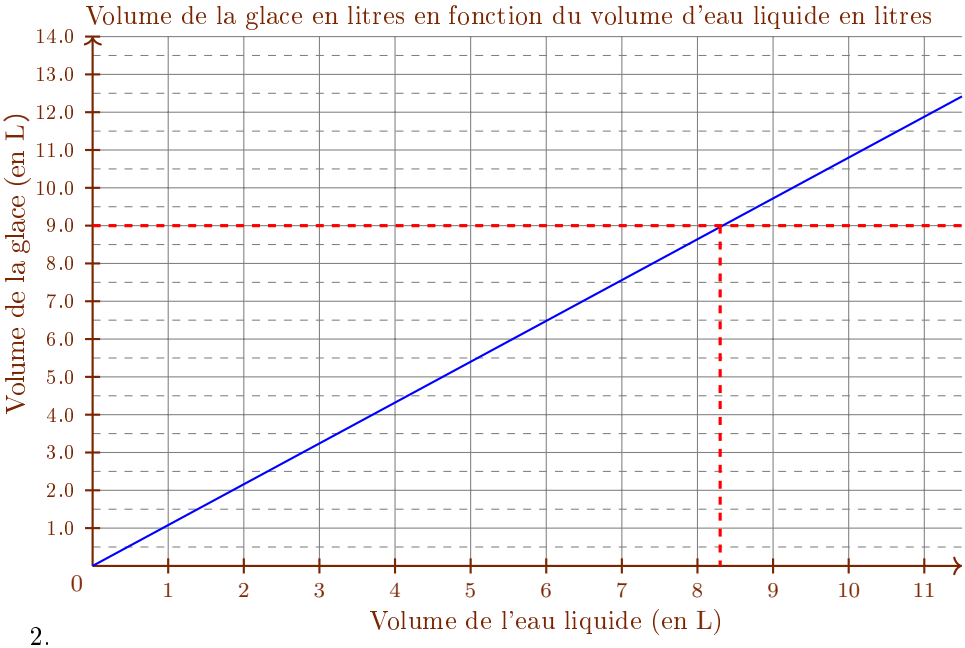
**Exercice 2.**




1.

Notons $f$ le fonction qui à un volume d'eau liquide associe le volume de glace correspondant. Par lecture graphique l'image de 7 est

$$f(7) = 7{,}5.$$




2.

L'antécédent de 9 par $f$ est, par lecture graphique, 8,3.

3. Déterminons la nature de $f$.

La courbe représentative de $f$ est une droite passant par l'origine du repère donc il s'agit de la courbe représentative d'une fonction affine. Autrement dit :

le volume de glace est proportionnel au volume d'eau liquide.

4. Le taux d'évolution, en pourcentage, du volume d'eau entre les états liquides et solides est :

$$\begin{aligned} p &= \frac{V_A - V_D}{V_D} \times 100 \\ &= \frac{10{,}8 - 10}{10} \times 100 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Le volume d'eau augmente de 8 % en gelant.

5. Déterminons le volume $V_g$ de glace correspondant à l'eau fournie par la ville.

   Le volume d'eau liquide nécessaire pour 30 jours est (en $m^3$) :

$$\begin{aligned} V_l(30) &= 30 \times 20 \\ &= 600 \end{aligned}$$

   Ce qui avant fonte, et d'après la question précédente, correspondait à volume de glace (en $m^3$) de :

$$\begin{aligned} V_g &= \left(1 + \frac{8}{100}\right) \times V_l(30) \\ &= 648 \end{aligned}$$

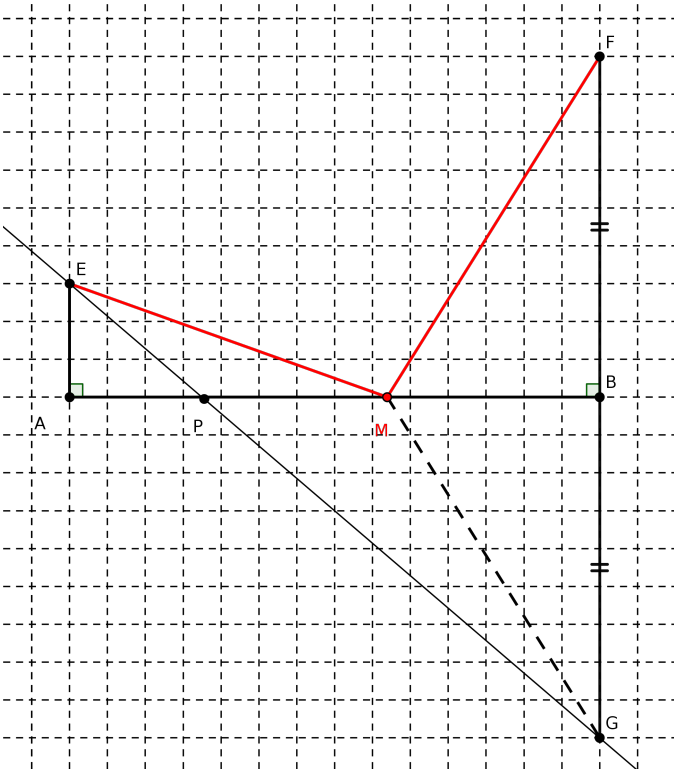
   Et donc en litres ($1\ m^3 = 1\,000\ dm^3 = 1\,000$ L) :

$$\begin{aligned} V_g &= 1\,000 \times 648 \\ &= 648\,000 \end{aligned}$$

Finalement le volume d'eau fourni par la ville de Lyon pour 30 jours de nettoyage correspond à 648 000 L de glace.

**Exercice 3.**

1. Voici la figure à l'échelle un demi, pour l'avoir en taille réelle et en version dynamique cliquez sur l'image.




2. Déterminons la position de $M$ qui minimise $EM + MF$.

   * D'après l'inégalité triangulaire :

$$EM + MG \geq EG$$

   Comme $E$, $G$ et $P$ sont alignés : $EG = EP + PG$.
   Nous pouvons réécrire la précédente inégalité triangulaire :

$$EM + MG \geq EP + PG.$$

   Nous en déduisons que $EG$ est un minorant de $EM + MG$.

   * Comme se minorant est atteint pour $M = P$, il s'agit d'un minimum.

| |
|---|
| Autrement dit $EM + MF$ est minimale lorsque $M$ et placé en $P$. |

3. (a) Remarquons une configuration de Thalès :
   — Les points $E$, $P$ et $G$ sont alignés dans cet ordre.
   — Les points $A$, $P$ et $B$ sont alignés dans cet ordre.
   Comme de plus $(AE)//(BG)$, car $(AE) \perp (AB)$ et $(AB) \perp (BG)$, le théorème de Thalès permet d'affirmer que :

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AE}{BG}.$$

   Autrement dit :

$$\boxed{\frac{AP}{14 - AP} = \frac{3}{9}.}$$

   (b) Calculons $AP$.

$$\frac{AP}{14 - AP} = \frac{3}{9}$$

   équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} AP \times 9 &= 3 \times (14 - AP) \\ 9AP &= 3 \times 14 - 3 \times AP \\ 9AP + 3AP &= 42 - 3AP + 3AP \\ 12AP &= 182 \\ \frac{12AP}{12} &= \frac{42}{12} \end{aligned}$$

$$\boxed{AP = \tfrac{7}{2}.}$$

4. Calculons $EG$.

   * Calculons $EP$ en usant du théorème de Pythagore.
   Le triangle $AEP$ est rectangle en $A$, donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$AE^2 + AP^2 = EP^2$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 3^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 &= EP^2 \\ \frac{85}{4} &= EP^2 \end{aligned}$$

Comme $EP$ estune longueur donc un nombre positif, nécessairement :

$$\begin{aligned} EP &= \sqrt{\frac{85}{4}} \\ EP &= \frac{\sqrt{85}}{2} \end{aligned}$$

* Calculons $PG$.
  $PBG$ est rectangle en $B$, donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$PG^2 = PB^2 + BG^2$$

Nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned} PG^2 &= (AB - AP)^2 + 9^2 \\ &= \left(14 - \frac{7}{2}\right)^2 + 9^2 \\ &= \frac{765}{4} \end{aligned}$$

Puisque $PG$ est une longueur donc positive :

$$\begin{aligned} PG &= \sqrt{\frac{765}{4}} \\ PG &= \frac{\sqrt{765}}{2} \end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned} EG &= EP + PG \\ &= \frac{\sqrt{85}}{2} + \frac{\sqrt{765}}{2} \\ &= 2\sqrt{85} \\ &\approx 18{,}43908 \end{aligned}$$

$EG \approx 18{,}4$ cm.

## III Troisième partie. 14 points

**Situation 1 : Extrait du manuel « Outils pour les maths » CM1 Magnard (édition 2011).**

1.

2.

**Situation 2 : Extrait du manuel scolaire « Tribu des maths » CM2 Magnard (édition 2010).**

1.

2.

3.

**Situation 3.**

1.

2.

**Situation 4 : Technique opératoire de la division.**

1.

2.