Épreuve de mathématiques CRPE 2015 sujet 0.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

I Première partie : problème. 13 points

Autour du théorème de Pythagore.

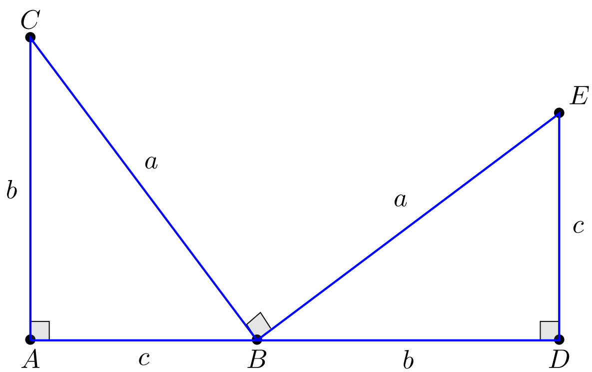
L'objet de ce problème est la démonstration, par une méthode classique, du théorème de Pythagore, et son utilisation pour calculer des distances une situation concrète.

Ce problème comprend deux parties A et B. Ces deux parties sont indépendantes.

Dans tout le problème, on désigne par Théorème de Pythagore l'énoncé suivant : *Dans un triangle rectangle, la somme des carrés des côtés de l'angle droit est égale au carré de l'hypoténuse.*

Partie A : démonstration par la méthode attribuée à Abraham Garfield (1831-1881), 20e président des États-Unis.

Dans la figure ci-dessous, les triangles ABC, BDE, BCE sont rectangles respectivement en A, D et B. On pose : $AB = DE = c$; $AC = BD = b$; $BC = BE = a$.



1. Justifier que les points A, B et D sont alignés.
2. Justifier que le quadrilatère $ADEC$ est un trapèze.
3. Exprimer de deux manières différentes l'aire du trapèze $ADEC$ en fonction de a, b et c.
4. En déduire l'égalité : $a^2 = b^2 + c^2$.

Partie B : une application du théorème de Pythagore.

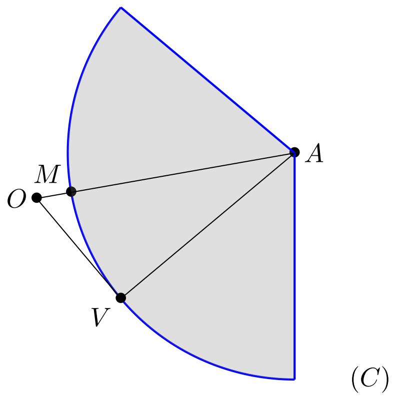
La courbure terrestre limite la vision lointaine sur Terre.

Plus l'altitude du point d'observation est élevée, plus la distance théorique de vision est grande.

Dans cet exercice, la Terre est assimilée à une sphère de centre A de rayon 6370 km.

La figure 1 ci-dessous représente une partie d'une vue en coupe de la Terre, qui ne respecte pas les échelles. (C) désigne le cercle de coupe, de centre A et de rayon 6 370 km.

Figure 1



Le point O représente l'emplacement des yeux d'un observateur. Le point M est le point d'intersection de la demi-droite $[AO)$ et du cercle (C).

On considère que M se situe au niveau de la mer ; la longueur OM représente alors l'altitude à laquelle se trouvent les yeux de cet observateur.

La droite (OV) est tangente en V au cercle (C).

Le point V représente le point limite de vision de l'observateur. La longueur OV est appelée *portée visuelle théorique*.

1. Les points O, M et V étant définis comme ci-dessus, montrer que la portée visuelle théorique OV, exprimée en km, est donnée par la formule :

$$OV = \sqrt{OM^2 + 12\,740 \times OM} \quad \text{où } OV \text{ et } OM \text{ sont exprimés en km.}$$

2. Calculer la portée visuelle théorique d'un observateur placé au niveau de la mer et dont les yeux sont situés à 1,70 m du sol (on arrondira au dixième de kilomètre près).

3. On considère la fonction f :

$$f : h \mapsto \sqrt{h^2 + 12740h}.$$

On a donc $OV = f(OM)$, où OV et OM sont exprimés en km.
On donne ci-après la représentation graphique de la fonction f.

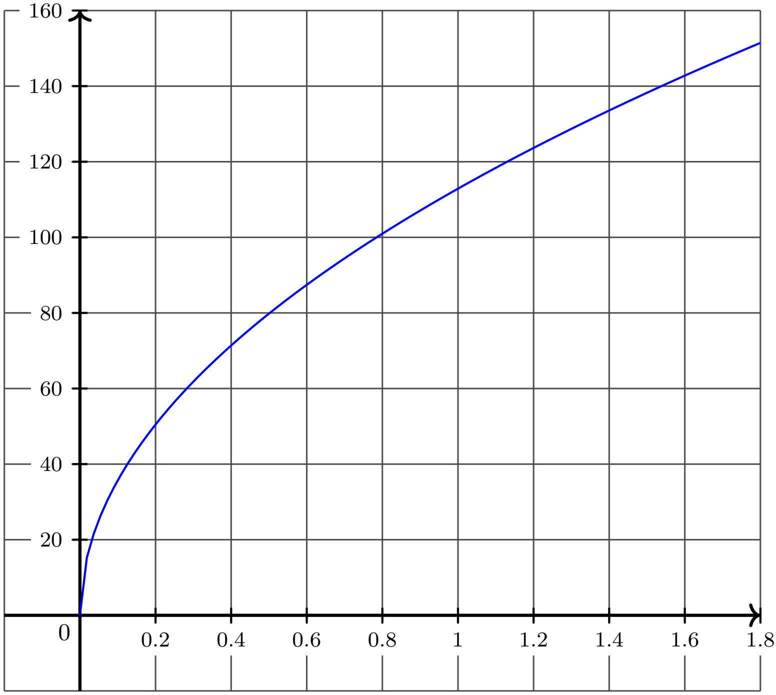


Figure 2

En utilisant le graphique de la figure 2, répondre aux questions suivantes :

(a) À quelle altitude doit-on se situer pour avoir une portée visuelle théorique de 100 kilomètres ?

(b) Un observateur situé au dernier étage de la Tour Eiffel dont l'altitude est environ 350 mètres pourrait-il théoriquement voir la mer ?

(c) L'affirmation suivante est-elle vraie : « si on est deux fois plus haut sur la Terre, alors on a une vision théorique deux fois plus grande » ?

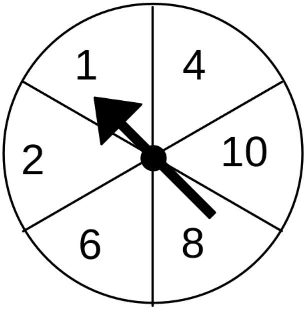
II Deuxième partie : problème. 13 points

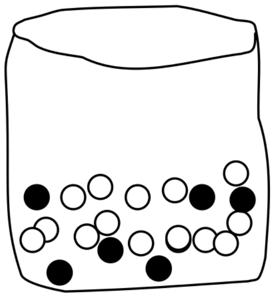
Cette partie est constituée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1.

Un stand à la foire du printemps propose un jeu dans lequel il faut d'abord faire tourner une roulette. Ensuite, **si** la roulette s'arrête sur un nombre pair, le joueur peut tirer une bille dans le sac.

La roulette et le sac sont représentés ci-dessous.





D'après PISA M471Q01

Des prix sont distribués aux joueurs qui tirent une bille noire. Suzy tente sa chance une fois.

Quelle est la probabilité que Suzy gagne un prix ?

Exercice 2.

Lors d'un tournoi de bowling, on note les résultats des 15 joueurs.

268 220 167 211 266 152 270 279 192 191 164 229 223 222 246.

Le nombre maximal de points réalisable par un joueur est de 300.

Quel résultat peut-on supprimer sans modifier la moyenne des résultats ?

Exercice 3.

La longueur officielle d'un marathon est 42,195 km.

Lors d'un marathon un coureur utilise sa montre-chronomètre. Après 5 km de course elle lui indique qu'il court depuis 17 minutes et 30 secondes.

1. Le coureur pense que s'il gardait cette allure tout au long de la course, il mettrait moins de 2 heures 30 en tout. A-t-il raison ?

2. En réalité la vitesse moyenne du coureur pendant les vingt premiers kilomètres a été de 16 km/h et cette vitesse a chuté de 10 % pour le restant du parcours.

   Quel a été son temps de parcours ? Donner la réponse en heures, minutes, secondes, centièmes de seconde (le cas échéant).

Exercice 4.

Le problème suivant a été proposé à des élèves.

> Je suis parti à neuf heures moins dix ; je suis arrivé à 10 h 40.
> Quelle a été la durée de mon parcours ? Explique comment tu as trouvé.

1. Indiquer le cycle et le niveau de classe auxquels cet énoncé peut être proposé.

2. Pour chacune des deux productions d'élèves reproduites ci-dessous, décrire la procédure utilisée et analyser les erreurs commises en formulant des hypothèses sur leurs origines.

Thomas :

Exercice 8 : je suis parti à neuf heures moins dix ; je suis arrivé à 10 h 40. Quelle a été la durée de mon parcours ? Explique comment tu as trouvé. Il a mit 90 min. 10h40 - 9h50 = 90 min

Kevin :

Exercice 8 : je suis parti à neuf heures moins dix ; je suis arrivé à 10 h 40. Quelle a été la durée de mon parcours ? Explique comment tu as trouvé.

9
10
70
40
——
69

9 h 69