# Épreuve de mathématiques CRPE 2015 sujet 0.

Lien vers le sujet seul : pdf.

## I Première partie : problème. 13 points

**Partie A : démonstration par la méthode attribuée à Abraham Garfield (1831-1881), 20e président des États-Unis.**

1. Pour que les points $A$, $B$ et $D$ soient alignés il suffit que $(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA})$ soit un angle plat.

   Démontrons que $(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}) = \pi \mod 2\pi$.

   Avec la relation de Chasles pour les angles :

   $$(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BE}) + (\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) \mod 2\pi$$

   Comme $ABC$ et $BDE$ sont isométriques (et donc semblables)

   $$\begin{aligned}(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}) &= (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) + \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) \mod 2\pi \\ &= (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) \mod 2\pi\end{aligned}$$

   La somme des angles d'un triangle égalant l'angle plat

   $$(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}) = \pi \mod 2\pi$$

   > Les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés.

2. Démontrons que $ADEC$ est un trapèze.

   $ADEC$ est un quadrilatère non croisé.

   $$\begin{cases}(AD) \perp (AC) \\ (AD) \perp (DE)\end{cases} \Rightarrow (AC)//(DE)$$

   > $ADEC$ est un trapèze de bases $[AC]$ et $[DE]$.

3. * Calculons l'aire de $ADEC$ avec la formule usuelle.

   En utilisant la formule de l'aire d'un trapèze pour le trapèze $ADEC$ de bases $[AC]$ et $[DE]$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(ADEC) &= \frac{(AC+DE)\times AD}{2}\\ &= \frac{(b+c)\times(b+c)}{2}\\ &= \frac{1}{2}(b+c)^2\end{aligned}$$

   * calculons l'aire de $ADEC$ en s'inspirant du découpage proposé par l'énoncé.

   En voyant $ADEC$ comme le recouvrement disjoint de trois triangles rectangles :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(ADEC) &= \mathcal{A}(ABC)+\mathcal{A}(BDE)+\mathcal{A}(BEC)\\ &= \frac{1}{2}AB\times AC+\frac{1}{2}BD\times DE+\frac{1}{2}BE\times BC\\ &= \frac{1}{2}bc+\frac{1}{2}bc+\frac{1}{2}a^2\\ &= bc+\frac{1}{2}a^2\end{aligned}$$

L'aire de $ADEC$ est $\frac{1}{2}(+c)^2$ ou $bc+\frac{1}{2}a^2$.

4. Démontrons que $a^2 = b^2 + c^2$.

   En égalant les deux expressions de l'aire de $ADEC$ obtenues à la question précédente, nous obtenons les égalités équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(b+c)^2 &= bc+\frac{1}{2}a^2\\ \frac{1}{2}(b^2+2bc+c^2) &= bc+\frac{1}{2}a^2\\ \frac{1}{2}b^2+bc+\frac{1}{2}c^2 &= bc+\frac{1}{2}a^2\\ \frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2 &= \frac{1}{2}a^2\\ b^2+c^2 &= a^2\end{aligned}$$

Ainsi

Nous avons bien $a^2 = b^2 + c^2$.

**Partie B : une application du théorème de Pythagore.**

1. Exprimons $OV$ en fonction de $OM$.

   $(OV)$ est tangente à $(C)$ en $V$ donc $AVO$ est rectangle en $V$.
   Nous en déduisons, d'après le théorème de Pythagore que

$$OV^2 + VA^2 = OA^2$$

   $OV$ est une longueur donc positive donc :

$$\begin{aligned} OV &= \sqrt{OA^2 - AV^2} \\ &= \sqrt{(OM + AV)^2 - AV^2} \\ &= \sqrt{OM^2 + 2OM \times AV + AV^2 - AV^2} \\ &= \sqrt{MO^2 + 2 \times OM} \end{aligned}$$

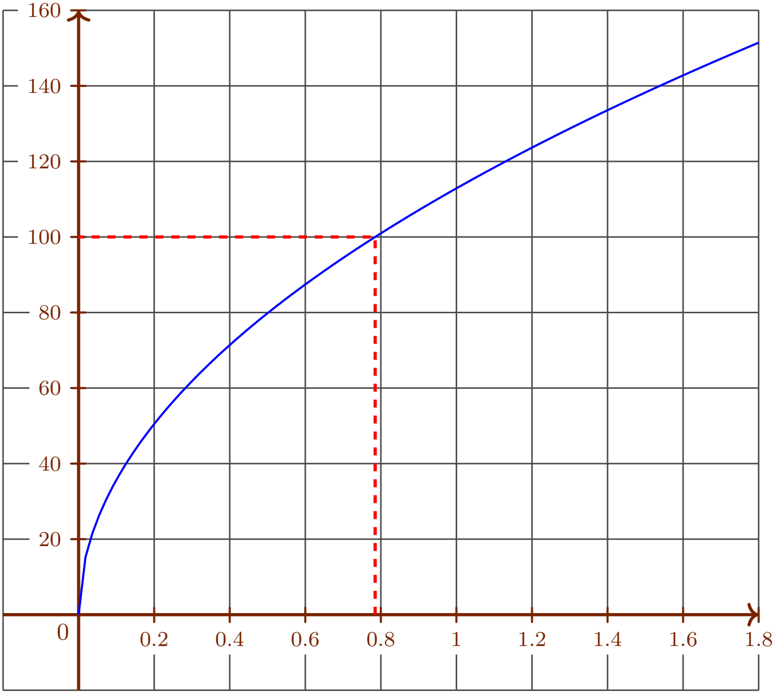
$$OV = \sqrt{OM^2 + 12740 \times OM}.$$

2. Calculons $OV$.

   D'après la question précédente si $OM = 1{,}70$ m $= 1{,}70 \times \frac{1}{1000}$ km $= 1{,}7 \cdot 10^{-3}$ km alors

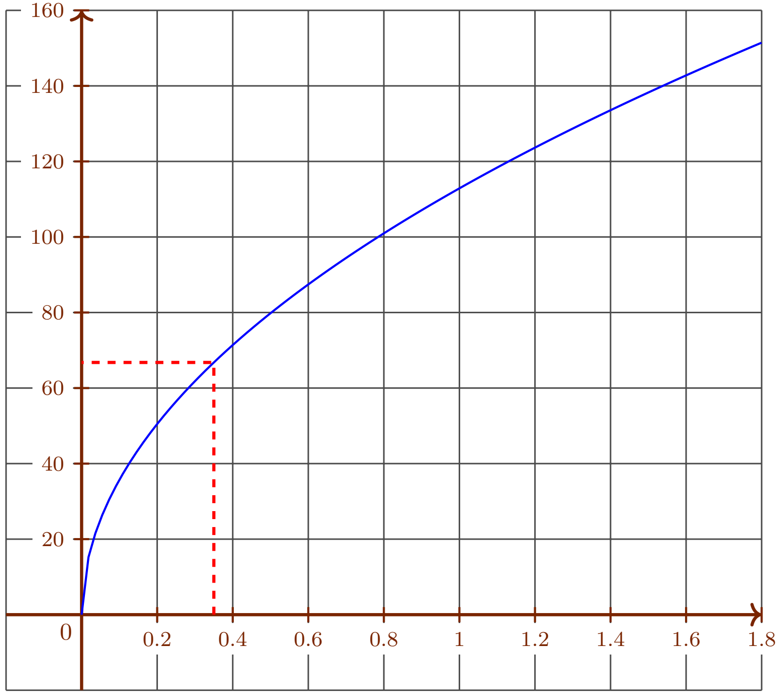
$$\begin{aligned} OV &= \sqrt{\left(1{,}7 \cdot 10^{-3}\right)^2 + 12740 \times 1{,}7 \cdot 10^{-3}} \\ &\approx 4{,}653 \end{aligned}$$

La portée visuelle, lorsque les yeux sont à 1,7 m du sol, est de 4,7 km.




3. (a)

Il faut un altitude de 0,79 km pour que la portée soit de 100 kilomètres.




(b) La mer étant située à plus de 66 km de Paris :

> il n'est pas possible d'observer la mer depuis la Tour Eiffel.

(c) Il est possible de répondre en observant que la courbe n'est une droite passant par l'origine (fonction linéaire) et ne peut donc pas représenter une situation de proportionnalité.

Il apparaît clairement sur le graphique que si la hauteur de l'observateur passe de 0,2 km à 0,4 km alors la vision théorique n'est pas deux fois plus grande.

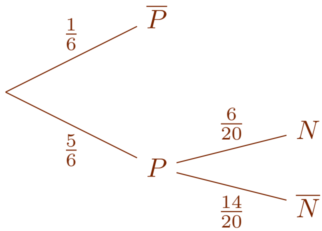
> L'affirmation proposée est fausse.

# II Deuxième partie : problème. 13 points

**Cette partie est constituée de quatre exercices indépendants.**

**Exercice 1.**

Notons $N$ l'événement « la bille est noire » et $P$ l'événement « le numéro est pair ».




D'après le principe multiplicatif, la probabilité d'obtenir un numéro pair puis une bille noire est de

$$\frac{5}{6} \times \frac{6}{20} = \frac{5}{20}.$$

La probabilité que Suzy gagne un prix est de $\frac{1}{4}$].

**Exercice 2.**

On peut enlever un résultat qui serait exactement égale à la moyenne des valeurs.

Calculons la moyenne $\overline{x}$ des résultats.

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{268 + 220 + \cdots + 246}{15} \\ &= 220\end{aligned}$$

C'est le résultat 220 que l'on peut supprimer sans modifier la moyenne des valeurs.

**Exercice 3.**

1.

2.

## Exercice 4.

1.

2.