Épreuve de mathématiques CRPE 2015 sujet 0.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

I Première partie : problème. 13 points

Autour du théorème de Pythagore.

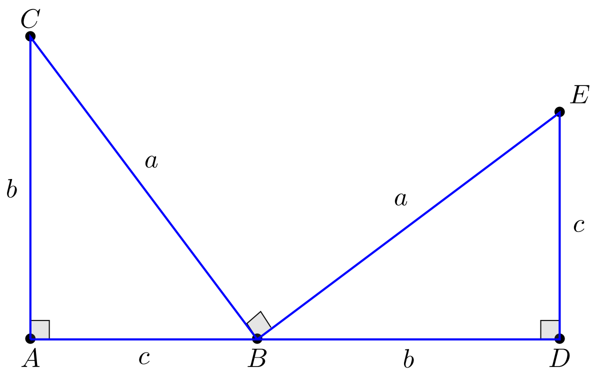
L'objet de ce problème est la démonstration, par une méthode classique, du théorème de Pythagore, et son utilisation pour calculer des distances une situation concrète.

Ce problème comprend deux parties A et B. Ces deux parties sont indépendantes.

Dans tout le problème, on désigne par Théorème de Pythagore l'énoncé suivant : *Dans un triangle rectangle, la somme des carrés des côtés de l'angle droit est égale au carré de l'hypoténuse.*

Partie A : démonstration par la méthode attribuée à Abraham Garfield (1831-1881), 20e président des États-Unis.

Dans la figure ci-dessous, les triangles ABC, BDE, BCE sont rectangles respectivement en A, D et B. On pose : $AB = DE = c$; $AC = BD = b$; $BC = BE = a$.



1. Justifier que les points A, B et D sont alignés.

   Pour que les points A, B et D soient alignés il suffit que $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$ soit un angle plat.

Démontrons que $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}) = \pi \mod 2\pi$.

Avec la relation de Chasles pour les angles :

$$(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE}) + (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \mod 2\pi$$

Comme ABC et BDE sont isométriques (et donc semblables)

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}) &= (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \mod 2\pi \\ &= (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \mod 2\pi\end{aligned}$$

La somme des angles d'un triangle égalant l'angle plat

$$(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}) = \pi \mod 2\pi$$

Les points A, B et C sont alignés.

2. Justifier que le quadrilatère $ADEC$ est un trapèze.

Démontrons que $ADEC$ est un trapèze.

$ADEC$ est un quadrilatère non croisé.

$$\left\{\begin{array}{l}(AD) \perp (AC) \\ (AD) \perp (DE)\end{array}\right. \Rightarrow (AC)//(DE)$$

$ADEC$ est un trapèze de bases $[AC]$ et $[DE]$.

3. Exprimer de deux manières différentes l'aire du trapèze $ADEC$ en fonction de a, b et c.

* Calculons l'aire de $ADEC$ avec la formule usuelle.

En utilisant la formule de l'aire d'un trapèze pour le trapèze $ADEC$ de bases $[AC]$ et $[DE]$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(ADEC) &= \frac{(AC + DE) \times AD}{2} \\ &= \frac{(b+c) \times (b+c)}{2} \\ &= \frac{1}{2}(b+c)^2\end{aligned}$$

* calculons l'aire de $ADEC$ en s'inspirant du découpage proposé par l'énoncé.

En voyant $ADEC$ comme le recouvrement disjoint de trois triangles rectangles :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(ADEC) &= \mathcal{A}(ABC) + \mathcal{A}(BDE) + \mathcal{A}(BEC)\\ &= \frac{1}{2}AB \times AC + \frac{1}{2}BD \times DE + \frac{1}{2}BE \times BC\\ &= \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}a^2\\ &= bc + \frac{1}{2}a^2\end{aligned}$$

L'aire de $ADEC$ est $\frac{1}{2}(+c)^2$ ou $bc + \frac{1}{2}a^2$.

4. En déduire l'égalité : $a^2 = b^2 + c^2$.

Démontrons que $a^2 = b^2 + c^2$.

En égalant les deux expressions de l'aire de $ADEC$ obtenues à la question précédente, nous obtenons les égalités équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(b+c)^2 &= bc + \frac{1}{2}a^2\\ \frac{1}{2}(b^2 + 2bc + c^2) &= bc + \frac{1}{2}a^2\\ \frac{1}{2}b^2 + bc + \frac{1}{2}c^2 &= bc + \frac{1}{2}a^2\\ \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 &= \frac{1}{2}a^2\\ b^2 + c^2 &= a^2\end{aligned}$$

Ainsi

Nous avons bien $a^2 = b^2 + c^2$.

Partie B : une application du théorème de Pythagore.

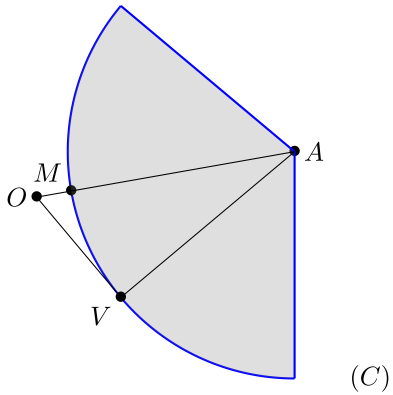
La courbure terrestre limite la vision lointaine sur Terre.

Plus l'altitude du point d'observation est élevée, plus la distance théorique de vision est grande.

Dans cet exercice, la Terre est assimilée à une sphère de centre A de rayon 6370 km.

La figure 1 ci-dessous représente une partie d'une vue en coupe de la Terre, qui ne respecte pas les échelles. (C) désigne le cercle de coupe, de centre A et de rayon 6 370 km.

Figure 1



Le point O représente l'emplacement des yeux d'un observateur. Le point M est le point d'intersection de la demi-droite $[AO)$ et du cercle (C).

On considère que M se situe au niveau de la mer ; la longueur OM représente alors l'altitude à laquelle se trouvent les yeux de cet observateur.

La droite (OV) est tangente en V au cercle (C).

Le point V représente le point limite de vision de l'observateur. La longueur OV est appelée *portée visuelle théorique*.

1. Les points O, M et V étant définis comme ci-dessus, montrer que la portée visuelle théorique OV, exprimée en km, est donnée par la formule :

$$OV = \sqrt{OM^2 + 12\,740 \times OM} \quad \text{où } OV \text{ et } OM \text{ sont exprimés en km.}$$

Exprimons OV en fonction de OM.

(OV) est tangente à (C) en V donc AVO est rectangle en V.
Nous en déduisons, d'après le théorème de Pythagore que

$$OV^2 + VA^2 = OA^2$$

OV est une longueur donc positive donc :

$$\begin{aligned} OV &= \sqrt{OA^2 - AV^2} \\ &= \sqrt{(OM + AV)^2 - AV^2} \\ &= \sqrt{OM^2 + 2OM \times AV + AV^2 - AV^2} \\ &= \sqrt{MO^2 + 2 \times OM} \end{aligned}$$

$$OV = \sqrt{OM^2 + 12740 \times OM}.$$

2. Calculer la portée visuelle théorique d'un observateur placé au niveau de la mer et dont les yeux sont situés à $1,70$ m du sol (on arrondira au dixième de kilomètre près).

   Calculons OV.

   D'après la question précédente si $OM = 1,70 \text{ m} = 1,70 \times \frac{1}{1000} \text{ km} = 1,7 \cdot 10^{-3}$ km alors

$$\begin{aligned} OV &= \sqrt{\left(1,7 \cdot 10^{-3}\right)^2 + 12740 \times 1,7 \cdot 10^{-3}} \\ &\approx 4,653 \end{aligned}$$

   La portée visuelle, lorsque les yeux sont à $1,7$ m du sol, est de $4,7$ km.

3. On considère la fonction f :

$$f : h \mapsto \sqrt{h^2 + 12740h}.$$

   On a donc $OV = f(OM)$, où OV et OM sont exprimés en km.
   On donne ci-après la représentation graphique de la fonction f.

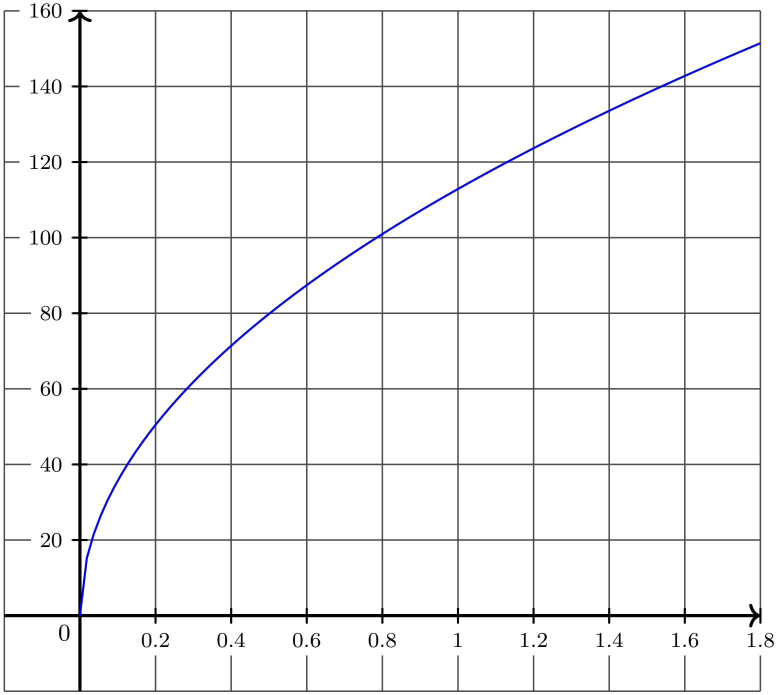
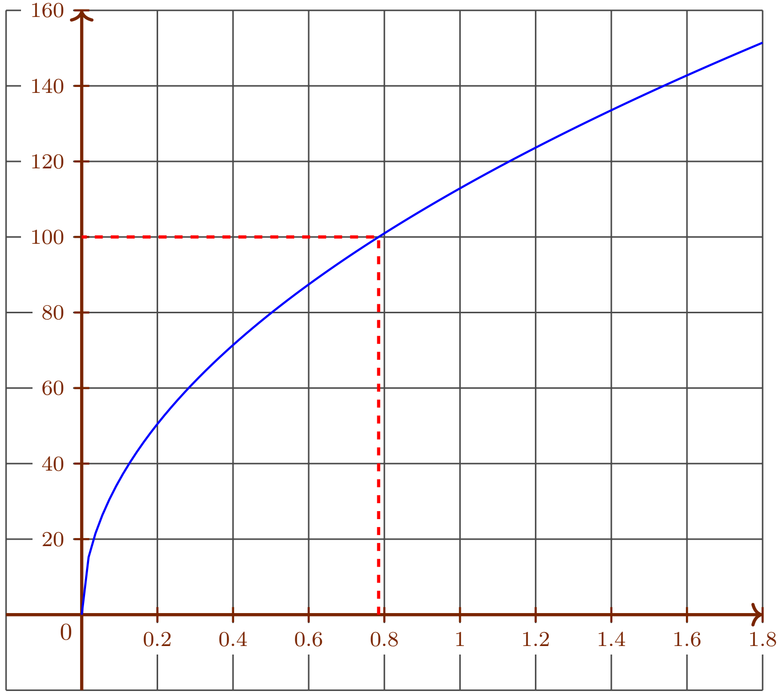


Figure 2

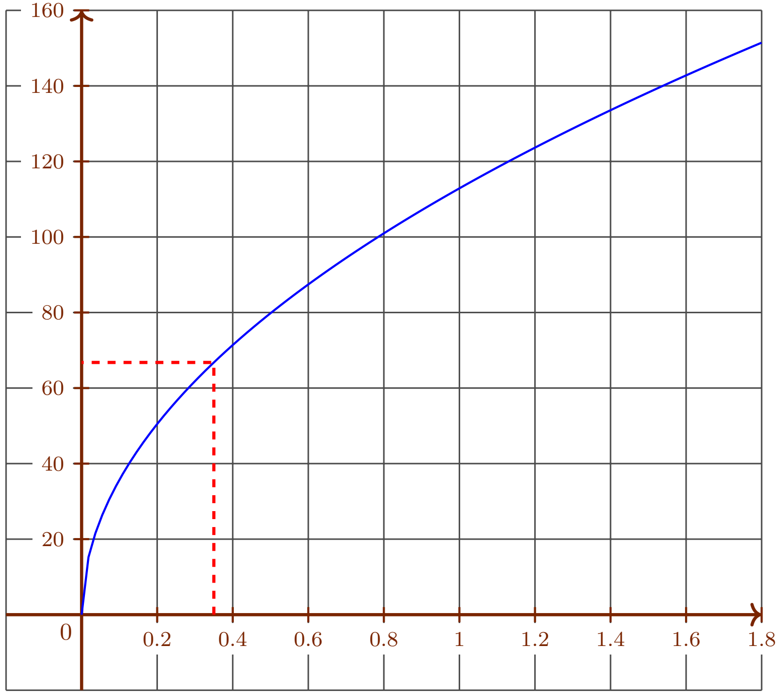
En utilisant le graphique de la figure 2, répondre aux questions suivantes :

(a) À quelle altitude doit-on se situer pour avoir une portée visuelle théorique de 100 kilomètres ?



Il faut un altitude de $0,79$ km pour que la portée soit de 100 kilomètres.

(b) Un observateur situé au dernier étage de la Tour Eiffel dont l'altitude est environ 350 mètres pourrait-il théoriquement voir la mer ?



La mer étant située à plus de 66 km de Paris :

il n'est pas possible d'observer la mer depuis la Tour Eiffel.

(c) L'affirmation suivante est-elle vraie : « si on est deux fois plus haut sur la Terre, alors on a une vision théorique deux fois plus grande » ?

Il est possible de répondre en observant que la courbe n'est une droite passant par l'origine (fonction linéaire) et ne peut donc pas représenter une situation de proportionnalité.

Il apparaît clairement sur le graphique que si la hauteur de l'observateur passe de $0,2$ km à $0,4$ km alors la vision théorique n'est pas deux fois plus grande.

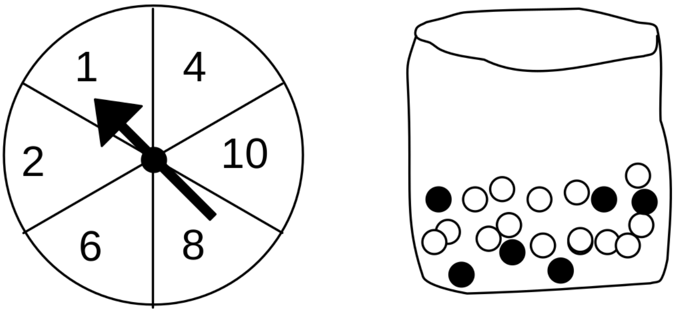
L'affirmation proposée est fausse.

II Deuxième partie : problème. 13 points

Cette partie est constituée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1.

Un stand à la foire du printemps propose un jeu dans lequel il faut d'abord faire tourner une roulette. Ensuite, **si** la roulette s'arrête sur un nombre pair, le joueur peut tirer une bille dans le sac.
La roulette et le sac sont représentés ci-dessous.

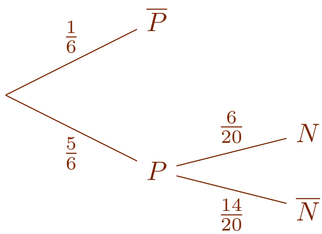


D'après PISA M471Q01

Des prix sont distribués aux joueurs qui tirent une bille noire. Suzy tente sa chance une fois.

Quelle est la probabilité que Suzy gagne un prix ?

Notons N l'événement « la bille est noire » et P l'événement « le numéro est pair ».



D'après le principe multiplicatif, la probabilité d'obtenir un numéro pair puis une bille noire est de

$$\frac{5}{6} \times \frac{6}{20} = \frac{5}{20}.$$

La probabilité que Suzy gagne un prix est de $\frac{1}{4}$].

Exercice 2.

Lors d'un tournoi de bowling, on note les résultats des 15 joueurs.

268 220 167 211 266 152 270 279 192 191 164 229 223 222 246.

Le nombre maximal de points réalisable par un joueur est de 300.

Quel résultat peut-on supprimer sans modifier la moyenne des résultats ?

On peut enlever un résultat qui serait exactement égale à la moyenne des valeurs.

Calculons la moyenne $\overline{x}$ des résultats.

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{268 + 220 + \cdots + 246}{15} \\ &= 220\end{aligned}$$

C'est le résultat 220 que l'on peut supprimer sans modifier la moyenne des valeurs.

Exercice 3.

La longueur officielle d'un marathon est $42,195$ km.

Lors d'un marathon un coureur utilise sa montre-chronomètre. Après 5 km de course elle lui indique qu'il court depuis 17 minutes et 30 secondes.

1. Le coureur pense que s'il gardait cette allure tout au long de la course, il mettrait moins de 2 heures 30 en tout. A-t-il raison ?

* Vitesse moyenne du coureur sur les 5 premiers kilomètres :

$$\begin{aligned} v &= \frac{d}{t} \\ &= \frac{5 \text{ km}}{17 \text{ min} + 30 \text{ s}} \\ &= \frac{5 \text{ km}}{17,5 \text{ min}} \\ &= \frac{5 \text{ km}}{\frac{17}{60} \text{ h}} \\ &= \frac{300}{17} \text{ km/h} \\ &\approx 17,647 \text{ km/h} \end{aligned}$$

* Déterminons le temps mis pour faire le marathon à la vitesse moyenne v :

$$\begin{aligned} t &= \frac{d}{v} \\ &\approx \frac{42,195 \text{ km}}{17,647 \text{ km/h}} \\ &\approx 2,391 \text{ h} \\ &\approx 2 \text{ h} + 0,391 \times 60 \text{ min} \\ &\approx 2 \text{ h} + 23,46 \text{ min} \\ &\approx 2 \text{ h} + 23 \text{ min} + 0,46 \times 60 \text{ s} \\ &\approx 2 \text{ h} + 23 \text{ min} + 28 \text{ s} \end{aligned}$$

En maintenant l'allure initiale il fera le marathon en 2 heures 23 minutes et 28 secondes.

2. En réalité la vitesse moyenne du coureur pendant les vingt premiers kilomètres a été de 16 km/h et cette vitesse a chuté de 10 % pour le restant du parcours.
   Quel a été son temps de parcours ? Donner la réponse en heures, minutes, secondes, centièmes de seconde (le cas échéant).

Exercice 4.

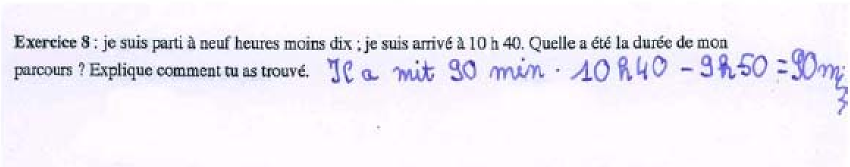
Le problème suivant a été proposé à des élèves.

> Je suis parti à neuf heures moins dix ; je suis arrivé à 10 h 40. Quelle a été la durée de mon parcours ? Explique comment tu as trouvé.

1. Indiquer le cycle et le niveau de classe auxquels cet énoncé peut être proposé.

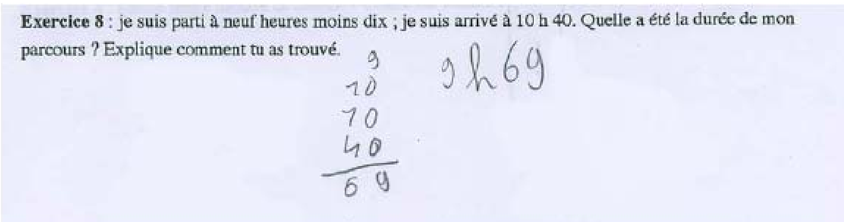
2. Pour chacune des deux productions d'élèves reproduites ci-dessous, décrire la procédure utilisée et analyser les erreurs commises en formulant des hypothèses sur leurs origines.

Thomas :



Exercice 8 : je suis parti à neuf heures moins dix ; je suis arrivé à 10 h 40. Quelle a été la durée de mon parcours ? Explique comment tu as trouvé. Il a mit 90 min · 10 h 40 − 9 h 50 = 90 min

Kevin :



Exercice 8 : je suis parti à neuf heures moins dix ; je suis arrivé à 10 h 40. Quelle a été la durée de mon parcours ? Explique comment tu as trouvé.

III Troisième partie : problème. 14 points

Analyse d'exercices proposés à des élèves et de productions d'élèves relevant de la proportionnalité.

Cette partie vise l'analyse mathématique de plusieurs situations mettant en œuvre le concept de proportionnalité.

Pour répondre aux différentes questions, le candidat pourra se référer s'il le souhaite à l'extrait du document d'accompagnement des programmes de collège présenté dans **l'annexe 1**.

I. Situation A.

Le problème ci-dessous a été donné en évaluation à des élèves de cycle 3.

Énoncé A *À chaque saut, une sauterelle avance de* 30 cm. *Combien de sauts doit-elle faire pour parcourir 15 mètres ?*

1. Dans cet énoncé, qu'est-ce qui indique que la situation est une situation de proportionnalité ?

2. Le problème a été proposé à 4 élèves, E1, E2, E3 et E4 dont les productions sont données en **annexe 2**. Pour chacun des 4 élèves.

   (a) Expliquer, en argumentant à partir des traces écrites de l'élève, si la procédure qui semble avoir été utilisée témoigne d'une mise en œuvre correcte des propriétés mathématiques de la proportionnalité.

   (b) Émettre une hypothèse sur la cause des erreurs éventuelles.

3. D'un point de vue théorique, cette situation de proportionnalité peut être modélisée par une fonction linéaire du nombre de sauts.

   (c) Expliciter cette fonction.

   (d) Donner la réponse attendue en utilisant cette fonction.

II. Situation B.

Le problème ci-dessous a été donné à des élèves à l'entrée en sixième.

Énoncé B 6 objets identiques coûtent 150 €. Combien coûtent 9 de ces objets ?

1. Dans cet énoncé, qu'est-ce qui indique que la situation est une situation de proportionnalité ?

2. D'un point de vue mathématique, qu'est-ce qui différencie cet énoncé du précédent ?

3. Proposer trois méthodes possibles pour résoudre cet exercice en cycle 3, et pour chacune expliciter les propriétés mathématiques utilisées.

III. Situation C.

En classe de CM2, un professeur propose le travail suivant aux élèves :

Énoncé C

Un pavé droit a pour base un carré de côté 2 cm. *On fait varier sa hauteur et on s'intéresse à son volume.*

1. *Complète le tableau de valeurs suivant*

Hauteur du prisme droit	2 cm	3 cm	4 cm	5 cm	6 cm	10 cm
Volume du prisme droit						

2. *Place sur la feuille les six points correspondant aux six colonnes du tableau. [le professeur a distribué une feuille de papier quadrillé sur laquelle les deux axes gradués d'un repère orthogonal ont été tracés. Sur l'axe des abscisses il a indiqué : hauteur du pavé droit, et sur celui des ordonnées : volume du pavé droit]*
3. *Que constates-tu ? vérifie avec ta règle.*

1. Citer une nouvelle caractérisation de la proportionnalité mise en évidence dans cet exercice.

2. Dans cet énoncé, c'est la hauteur du pavé droit qui varie. Si le professeur avait choisi de faire varier la longueur du côté du carré de la base, qu'est-ce que cela aurait changé ? Justifier.

IV. Situation D.

Dans le document ressource « le nombre au cycle 3 » on trouve, au chapitre proportionnalité, les lignes suivantes :

Le terme de « proportionnalité » apparaît dans les programmes 2008 [BO2008] au cycle 3 [. . .] mais la notion de proportionnalité est présente dans les situations mathématiques depuis la maternelle. En effet, les jeux d'échange sont déjà des problèmes relevant de la proportionnalité.
Exemple : Une bille bleue vaut deux billes rouges. Si je te donne 3 billes bleues, combien me donnes-tu de billes rouges ?

1. En quoi le problème ci-dessus est-il un problème de proportionnalité ?

2. Expliciter une procédure de résolution envisageable en grande section de maternelle.

Annexe 1

Extrait du document : Ressource pour les classes de 6e , 5e , 4e , 3e de collège
La proportionnalité au collège - EDUSCOL

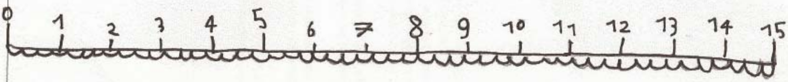
Niveau	Cadres	Types de nombres	Procédures de résolution
Cycle 3	Grandeurs	— Naturels — Décimaux simple (rapport scalaire ou coefficient du type 1,5 ou 2,5. . .)	Raisonnement proportionnel, utilisant : — Propriété additive — Propriété d'homogénéité — Passage par l'unité — Coefficient de proportionnalité « simple »
Sixième	Grandeurs	— Naturels — Décimaux simples — Quotients (plus le nombre pi)	Raisonnement proportionnel, utilisant : — Propriété additive — Propriété d'homogénéité — Passage par l'unité — Coefficient de proportionnalité
Cinquième	Grandeurs Numérique	— Naturels — Décimaux — Quotients (plus le nombre π)	Formulation et utilisation des propriétés : — Propriété additive — Propriété d'homogénéité — Passage par l'unité — Coefficient de proportionnalité
Quatrième	Grandeurs Numérique Graphique	— Naturels — Décimaux — Quotients (plus le nombre π)	— Utilisation des propriétés travaillées en 6e et 5e — Égalité de quotients et produits en croix — Caractérisation graphique (sans justification)
Troisième	Grandeurs Numériques Graphiques	— Naturels — Décimaux — Quotients (plus les nombre π, $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; . . .)	— Modélisation et traitement à l'aide d'une fonction linéaire — Les procédures envisagées antérieurement restent disponibles

Annexe 2
Production de quatre élèves en réponse à l'exercice A

Élève E1

A chaque saut, une sauterelle avance de 30 centimètres. Combien de sauts doit-elle faire pour parcourir 15 mètres ?

Fais tes calculs dans ce cadre.



Réponse : Elle va faire 52 bon

Élève E2

A chaque saut, une sauterelle avance de 30 centimètres. Combien de sauts doit-elle faire pour parcourir 15 mètres ?

Fais tes calculs dans ce cadre.

$$\begin{array}{r} 30 \\ \times\ 50 \\ \hline 00 \\ +\ 1500 \\ \hline 1500 \end{array}$$

Réponse : Elle doit faire 50 sauts pour faire 15 mètres

Élève E3

A chaque saut, une sauterelle avance de 30 centimètres. Combien de sauts doit-elle faire pour parcourir 15 mètres ?

Fais tes calculs dans ce cadre.

$$\begin{array}{r} 30 \\ +\ 15 \\ \hline =\ 45 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 30 \\ -\ 15 \\ \hline =\ 20 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 30 \\ \times\ 15 \\ \hline =\ 30 \end{array}$$

Réponse : Le sauterelle sautera 20 mètre

Élève E4

A chaque saut, une sauterelle avance de 30 centimètres. Combien de sauts doit-elle faire pour parcourir 15 mètres ?

Fais tes calculs dans ce cadre.	
3s. = 90 cm 10s. = 300 cm = 3 mètres 20s. = 600 cm = 6 mètres 30s. = 900 cm = 9 mètres 40s. = 1200 cm = 12 "	50s. = 13 mètres

Réponse : La sauterelle doit faire 50 sauts pour parcourir 15 mètres..