# Épreuve de mathématiques CRPE 2014 groupe 3.

Lien vers le sujet seul : pdf.

## I Première partie (13 points).

### Partie A : optimisation du volume d'un moule.

1. Déterminons le graphique correspondant au volume du moule en fonction de $x$.

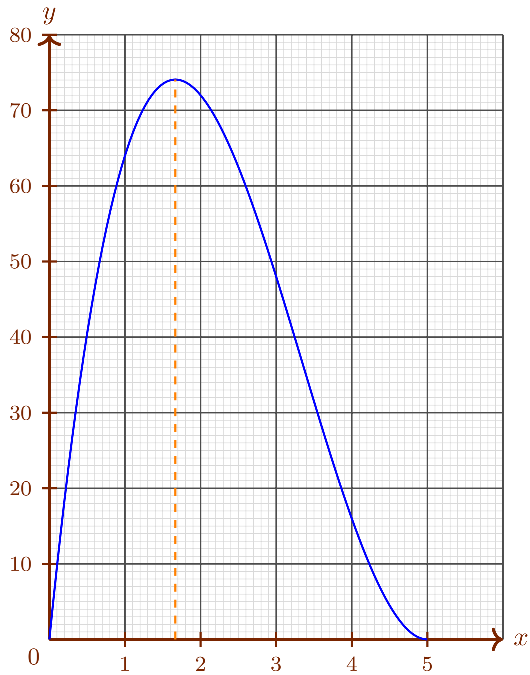
   Notons $x$ la longueur d'un côté du petit carré.
   Clairement $0 \leqslant x \leqslant 5$. Les graphiques 1 et 2 sont donc exclus.

   Le moule étant parallélépipédique son volume est

$$\begin{aligned}\mathscr{V}(x) &= x(10-2x)^2 \\ &= 4x(5-x)^2\end{aligned}$$

   En particulier $\mathscr{V}(1) = 4 \times 16 = 64 \text{ cm}^3$. Donc

   $\boxed{\text{le volume du moule est représenté sur le graphique 2.}}$




2.

Le volume maximal est obtenu pour $x$ compris entre 1 et 2.

**Partie B : optimisation de la disposition des moules sur les plaques de cuisson.**

Déterminons le nombre de moules sur une plaque.

* Pour la largeur (par exemple de haut en bas).
Il faut compter un 1 cm pour séparer du bord haut de la plaque puis il faut alors placer un moule de 7 cm suivi d'un espace de 1 cm. Puis réitéré le placement du moule jusqu'à exhausser toute la largeur.
En procédant à une division euclidienne :

$$40 - 1 = (1 + 7) \times 4 + 7.$$

On peut donc placer 4 moules dans le sens de la largeur (et il restera 7 cm inutilisés).

* De même pour la longueur :

$$70 - 1 = (7 + 1) \times 8 + 5.$$

Il est donc possible de placer 8 moules dans le sens de la longueur.

* Sur la plaque toute entière il y a donc : $4 \times 8$ moules sur une plaque.

Il pourra placer 32 moules sur une plaque.

**Partie C : optimisation du coût du chocolat.**

1. Déterminons la masse $m_c$ de chocolat nécessaire.

   Il s'agit d'une situation de proportionnalité.
   Il doit prévoir $\frac{200}{4} = 50$ g par personne.
   Donc pour 17 personnes il faut prévoir $17 \times 50 = 850$ g.

   $m_c = 850$ g.

2. (a) Déterminons le coût pour chaque sorte de chocolat.

| Tablette | Prix d'une tablette (en euros) | Quantité par tablette (en g) | Nombres de tablettes nécessaires | Coût |
|---|---|---|---|---|
| Chocolat Dégustation | 2,10 | 150 | 6 | 12,60 |
| Chocolat Saveur | 2,80 | 200 | 5 | 14 |
| Chocolat Pâtissier | 2,62 | 200 | 5 | 13,10 |
| Chocolat Intense | 1,36 | 100 | 9 | 12,24 |
| Chocolat À cuisiner | 2,81 | 200 | 5 | 14,05 |

Il doit donc acheter le Chocolat Intense.

(b) Déterminons le coût $c$ pour le « Chocolat Dégustation ».

Le coefficient multiplicateur correspondant à une baisse de 5 % est

$$\begin{aligned} CM &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{-5}{100} \\ &= 0{,}95 \end{aligned}$$

Avec la réduction de 5% 6 tablettes de « Chocolat Dégustation » coûtent

$$\begin{aligned} c &= CM \times 12{,}60 \\ &= 11{,}97 \end{aligned}$$

Dans ce cas le « Chocolat Dégustation » est moins cher que le « Chocolat Intense ».

> Choisir les tablettes « Chocolat Dégustation » devient donc plus avantageux.

# II Deuxième partie (13 points).

**Exercice 1.**

1. Les rectangles de dimensions 2 et 5 d'une part et 1 et 6 d'autre part ont le même périmètre (14) mais pas la même aire (respectivement 10 et 6).

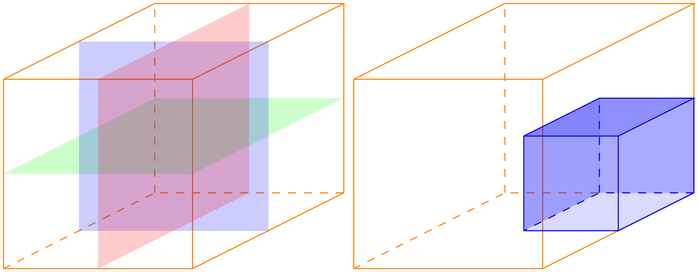
> L'affirmation 1 est fausse.

2. Le volume d'un cube de 50 cm d'arête est

$$\begin{aligned} \mathscr{V}_{0,5} &= (50\ \text{cm})^3 \\ &= (50 \times 1\ \text{cm})^3 \\ &= \left(50 \times 10^{-2}\ \text{m}\right)^3 \\ &= (0{,}5\ \text{m})^3 \\ &= 0{,}5^3\ \text{m}^3 \\ &= 0{,}125\ \text{m}^3 \end{aligned}$$

La proportion de $\mathscr{V}_{0,5}$ par rapport au cube d'origine est donc : $p = \frac{0{,}125\ \text{m}^3}{1\ \text{m}^3} = 0{,}125$.
Il faudra donc $40 \times p = 5$ sacs de ciments.

Intuitivement en découpant les arêtes par leur milieu nous voyons apparaître 8 petits cubes :



Pour remplir un cube de 50 cm d'arête il faut 8 fois moins de sacs. Il faut donc $\frac{40}{8} = 5$ sacs.

L'affirmation 2 est vraie.

3. Soit $(x,y) \in [\![0\ ;\ 9]\!]^2$ tels que $A$ et $B$ s'écrivent avec les chiffres $x$ et $y$.
On a en utilisant la décomposition de l'écriture décimale :

$$\begin{aligned} 10x + y + 10y + x &= 11x + 11y \\ &= 11(a + b) \end{aligned}$$

Ainsi $A + B$ est divisible par 11.

L'affirmation 3 est vraie.

4. Le coefficient multiplicateur correspondant à une baisse de 30 % est :

$$\begin{aligned} CM_1 &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{-30}{100} \\ &= 0{,}7 \end{aligned}$$

De même le coefficient multiplicateur correspondant à une hausse de 30 % est $CM_2 = 1{,}3$.

Le coefficient multiplicateur global correspondant à ces deux évolutions est :

$$\begin{aligned} CM_{global} &= CM_1 \times CM_2 \\ &= 0{,}70 \times 1{,}30 \\ &= 0{,}91 \end{aligned}$$

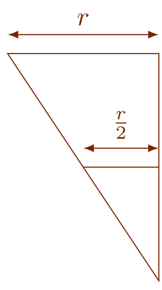
Le taux d'évolution global est donc :

$$\begin{aligned} t_{global} &= 100 \times (CM_{global} - 1) \\ &= 100 \times (0{,}91 - 1) \\ &= -9 \end{aligned}$$

Ainsi ces deux évolutions correspondent à une baisse de 9%.

L'affirmation 4 est fausse.

5. Le volume d'un cône est donné par la formule $\frac{1}{3} \times \left(\pi r^2\right) \times h$.
S'il est rempli à mi-hauteur (comme indiqué sur le dessin) le volume est $\frac{1}{3} \times \left(\pi \left(\frac{r}{2}\right)^2\right) \times \frac{h}{2}$. Le rayon du disque de base étant divisé par 2 d'après le théorème de Thalès.




Autrement dit le volume est alors de $\frac{1}{8} \times \frac{1}{3} \times \left(\pi r^2\right) h$. Le volume a été divisé par 8.

L'affirmation 5 est fausse.

**Exercice 2.**

1. Calculons $E_c$.

$$\begin{aligned}
E_c &= \frac{1}{2} \times m \times v^2 \\
&= \frac{1}{2} \times (1 \text{ t}) \times \left(100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2} \times 1 \times 100^2 \text{ t} \cdot \text{km}^2 \cdot \text{h}^{-2} \\
&= 5\,000 \;\; (1\,000 \text{ kg}) \times \left(1\,000^2 \text{ m}^2\right) \times \left(\frac{1}{3\,600^2 \text{ s}^2}\right) \\
&= 5\,000 \times 1\,000 \times 1\,000^2 \times \frac{1}{3\,600^2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \\
&\approx 385\,802{,}47 \text{ J}
\end{aligned}$$

$$\boxed{E_c = 385\,802{,}47 \text{ J.}}$$

2. L'énergie cinétique n'est pas proportionnelle à la vitesse qui est une fonction du carré de la vitesse. On peut le vérifier en calculant différentes valeur de l'énergie cinétique en fonction de la vitesse :

$$\frac{E_c(v_1)}{E_c(v_2)} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2$$

Donc : $\frac{E_c(1)}{E_c(2)} = \frac{1}{4}$ mais $\frac{E_c(1)}{E_c(3)} = \frac{1}{9}$. Ce contre-exemple montre que

l'énergie cinétique n'est pas proportionnelle à la vitesse.

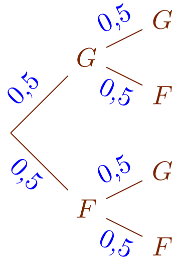
**Exercice 3.**

1. La variable aléatoire qui compte le nombre de garçon dans une famille de deux enfants suit une loi binomiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(2; \frac{1}{2}\right)$.
La probabilité d'avoir deux garçon est donc :

$$\mathbb{P}(X = 2) = \binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{4-2} = \frac{1}{4}.$$

Plus simplement il est possible de raisonner avec un arbre pondéré.

Notons $G$ l'événement « Obtenir un garçon. » et $F$ l'événement « Obtenir une fille. » et représentons le fait d'avoir deux enfants par un arbre probabiliste.




En utilisant le principe multiplicatif : $\mathbb{P}(GG) = 0{,}5 \times 0{,}5$

$$\boxed{\mathbb{P}(GG) = 0{,}25.}$$

2. Le graphique illustre ce qu'on appelle la loi des grands nombres : lorsqu'on renouvelle un grand nombre de fois une expérience aléatoire la fréquence d'apparition d'une issue tend vers une valeur fixe qui est la probabilité de l'issue.

**Exercice 4.**

1. (a) =SOMME(`B9 :D9`) ou =SOMME(`B9 ;C9 ;D9`)

   (b) =MOYENNE(`B9 :B13`) ou =SOMME(`B9 :B13`)/5

2. Il ne faut pas additionner les vitesses mais calculer le quotient de la distance totale par le temps total de course.
   La vitesse moyenne de l'athlète 1 est donnée par (les distances sont en km et les vitesses en km/h) :

$$v = \frac{1{,}5 + 40 + 10}{\frac{1{,}5}{3{,}6} + \frac{40}{35{,}3} + \frac{10}{15}}$$
$$\approx 23{,}23506$$

$$v \approx 23{,}24 \text{ km/h}.$$

# III Troisième partie. 14 points

# IV Partie A : en cycle 2.

1.
2.

# V Partie B : en cycle 3.

1.
2. (a)
   (b)
3. (a)
   (b)

# VI Partie C : « Per Gelosia ».

1.
2.
3.
4.