Épreuve de mathématiques CRPE 2014 groupe 2.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Durée : 4 heures.
Épreuve notée sur 40.

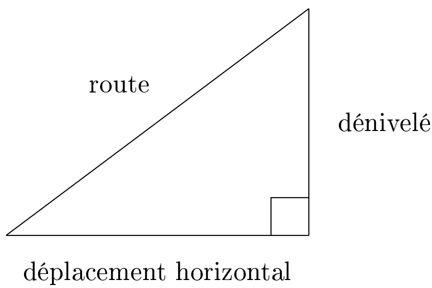
I Première partie (13 points).

Albert part dans les Alpes Autrichiennes, dans la mythique station de ski de Kitzbühel.

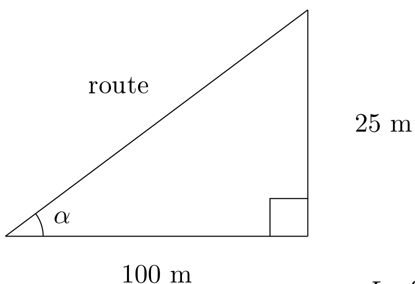
Suivons-le dans son périple et ses diverses activités.

Partie A : la montée à la station.

Sur le dernier tronçon de route montant à la station en ligne droite, Albert a vu un panneau signalant une pente constante de 25 %. La pente est le rapport entre le dénivelé et le déplacement horizontal (théorique).



Ainsi une pente de 25 % indique un dénivelé de 25 m pour un déplacement horizontal de 100 m.



La figure n'est pas à l'échelle

On note α l'angle que la route forme avec l'horizontale. Cet angle est appelé l'inclinaison de la route.

1. Calculer, au degré près, l'inclinaison du dernier tronçon de la route empruntée par Albert.

2. Ce tronçon de route permet de s'élever de 145 m. Calculer sa longueur, au mètre près.

Partie B : ski sur le Streif.

Sitôt arrivé, Albert décide de dévaler la piste appelée Streif, réputée la plus difficile au monde.

Voici quelques caractéristiques de cette piste :

1. Longueur totale : 3312 m
2. Pente maximale : 85 %
3. Pente minimale : 5 %
4. Dénivelé : 862 m

1. Albert s'élance dans la descente à 14 h 58 min 47 s et termine la descente à 15 h 03 min 08s.
   Calculer sa vitesse moyenne durant cette descente, en km/h, arrondie au dixième.

2. Le meilleur skieur de la station a réalisé la descente à la vitesse moyenne de 100 km/h.
   S'il s'était lancé dans la descente au même instant qu'Albert, combien de temps avant lui serait-il arrivé ?

Partie C : saut sur la Streif.

Lors de sa descente de la Streif, Albert effectue un saut.

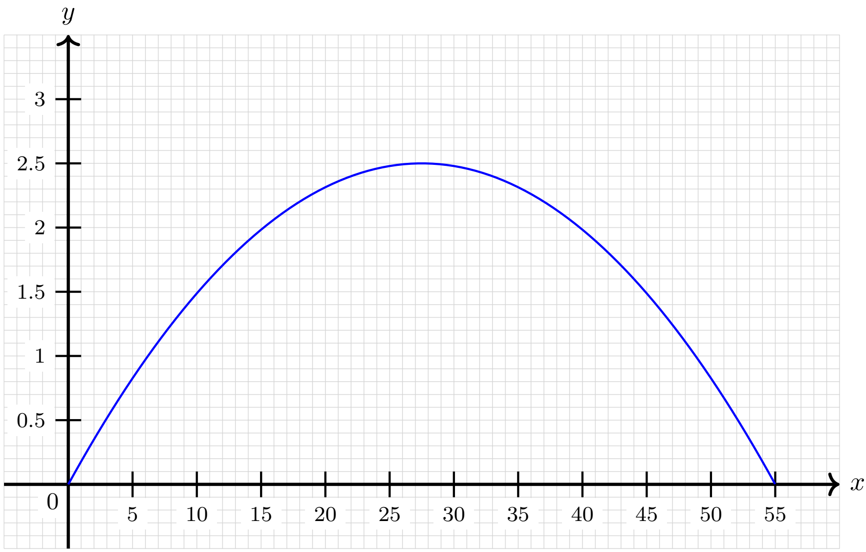
On admet que la hauteur du saut d'Albert par rapport au sol de la piste s'exprime en fonction du déplacement horizontal, x, par la fonction S suivante :

$$S : x \mapsto 2{,}5 - \frac{(2x-55)^2}{1210},$$

x et $S(x)$ étant exprimés en mètre.

1. Calculer l'image de 10 par la fonction S. Interpréter ce résultat en ce qui concerne le saut d'Albert.

2. On a tracé la courbe représentative de cette fonction S.



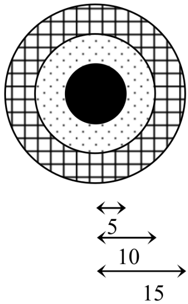
   (a) Que représente, pour Albert, la valeur 55 sur l'axe des abscisses ?

   (b) Déterminer graphiquement quelle a été la hauteur maximale du saut d'Albert. À quel déplacement horizontal cette valeur correspond-elle ?

3. À l'aide de l'expression de la fonction S, retrouver, par le calcul, la hauteur maximale du saut d'Albert.

Partie D : tir à la carabine.

Albert observe ensuite un entraînement au tir à la carabine sur une cible. La cible est constituée de trois disques concentriques de rayons respectifs 5 cm, 10 cm et 15 cm, comme schématisé ci-dessous.



Les mesures des rayons ci-dessus sont en centimètres

Un débutant touche la cible une fois sur deux.

Lorsqu'il atteint la cible, la probabilité qu'il atteigne une zone donnée est proportionnelle à l'aire de cette zone.

1. Un tireur débutant touche la cible. Quelle probabilité a-t-il d'atteindre la couronne extérieure (partie quadrillée) ?

2. Un tireur débutant va appuyer sur la détente. Quelle probabilité a-t-il de toucher la cible et d'atteindre son cœur (partie noire) ?

II Deuxième partie (13 points).

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1.

En classe de CM2, un professeur propose l'exercice suivant :

> Mathis a effeuillé des fleurs à 5 pétales en disant « j'aime les maths... un peu..., beaucoup..., passionnément ..., à la folie ». Il a ôté 83 pétales en tout. Il n'est passé à la fleur suivante que lorsqu'il avait complètement effeuillé la fleur précédente.
> Combien de fleurs a-t-il effeuillées en totalité ? Sur la dernière fleur qu'il a effeuillée, reste-t-il des pétales ?

1. De quelle opération mathématique ce problème relève t-il ?

2. Proposer trois procédures possibles pour répondre à la question posée.

Exercice 2.

Emma propose à son ami Jules de lui donner ses bonbons à la condition qu'il trouve exactement combien elle en a. Emma lui dit qu'elle a moins de 100 bonbons et que lorsqu'elle les regroupe par deux, trois, quatre, cinq ou six, il lui en reste toujours un.

1. Combien Emma a-t-elle de bonbons ? Justifier la réponse en explicitant la démarche utilisée.

   Soit $n \in [\![1\ ;\ 100]\!]$ le nombre de bonbons de Emma.
   Par hypothèse $n-1$ est congru 0 modulo à 2, 3, 4, 5 et 6. Donc $n-1$ est un multiple de 4, 3 et 5 (puisque $6 = 2 \times 3$). Donc n est congru à 1 modulo 60.
   Autrement dit : $n = 61$.
   Réciproquement si $n = 61$, alors les conditions de l'énoncé sont évidemment respectées.

2. Pour vérifier sa réponse, Jules décide d'utiliser un tableur. Pour cela, il utilise la fonction MOD(*nombre*; *diviseur*), qui donne le reste de la division euclidienne du *nombre* par le *diviseur*.

   Jules a prévu de calculer en colonne les restes de la division euclidienne des nombres de la colonne `A` par 2, 3, 4, 5 et 6.

	A	B	C	D	E	F
1		2	3	4	5	6
2	1					
3	2					
4	3					
5	4					
6	5					
7	6					
8	7					
9	8					
10	9					
11	10					
12	11					
13	12					
14	13					
15	14					

   (a) Parmi les formules suivantes, en choisir une qui pourrait être insérée dans la cellule `B2` et qui pourrait, en étant étendue vers le bas, compléter correctement la colonne `B` :

$=$ MOD(1; 2)	$=$ MOD(`A2`; `B1`)	$=$ MOD(`A2`; 2)
$= MOD(1;$ `B1`)	$=$ MOD(`A2`; `B$1`)	$=$ MOD(2; 1)

(b) Jules a rempli de la même façon le reste du tableau. Comment peut-il l'utiliser pour résoudre ce problème ?

Exercice 3

On effectue à la calculatrice les calculs ci-dessous :

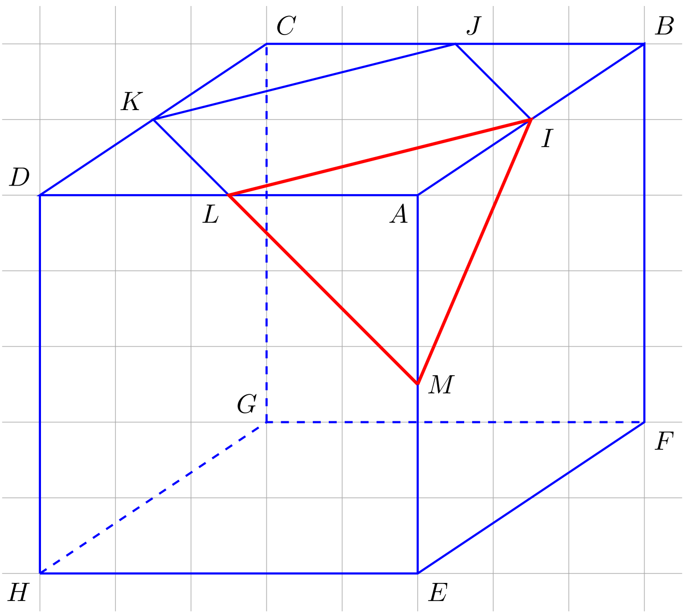
$$123^2 - 122^2 - 121^2 + 120^2 = 4$$
$$45^2 - 44^2 - 43^2 + 42^2 = 4$$

1. Tester ce résultat surprenant sur une autre série de quatre nombres consécutifs et émettre une conjecture.

2. Prouver que la conjecture faite précédemment est vraie.

Exercice 4.

Soit $ABCDEFGH$ un cube de côté 12 cm.
On note I le milieu de $[AB]$, J celui de $[BC]$, K celui de $[CD]$, L celui de $[AD]$ et M celui de $[AE]$.



1. Démontrer que $IJKL$ est un carré.

2. Calculer l'aire du carré $IJKL$ (en cm^2).

3. $AILM$ est une pyramide à base triangulaire. Calculer le volume de cette pyramide (en cm^3).
   Rappel :

$$\text{volume d'une pyramide} = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}.$$

4. On ôte au cube en chacun de ses huit sommets une pyramide identique à $AILM$ pour créer un nouveau solide. Vérifier que le volume de ce nouveau solide est 1440 cm^3.