Épreuve de mathématiques CRPE 2014 groupe 2.

Lien vers le sujet seul : pdf.

I Première partie (13 points).

Partie A : la montée à la station.

1. Calculons une mesure de α.

   Puisque le triangle est rectangle comme le montre la figure : $\tan(\alpha) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.
   On en déduit a mesure de l'angle au degré près :

   $$\boxed{\alpha \approx 14°.}$$

2. Déterminons la longueur du tronçon.

   Puisque ce tronçon permet de s'élever de 145 m le déplacement horizontal correspondant est de $\frac{145}{25} \times 100 = 580$ m. Donc, d'après le théorème de Pythagore, le tronçon mesure : $\sqrt{580^2 + 145^2} \approx 598$ m au mètre près.

Partie B : ski sur le Streif.

1. Calculons la vitesse moyenne, v_m, durant cette descente.

   La descente dure (en heures) :

$$\begin{aligned}
&(15\text{ h} + 3\text{ min} + 08\text{ s}) - (14\text{ h} + 58\text{ min} + 47\text{ s})\\
&= \left(15\text{ h} + 3 \times \frac{1}{60}\text{h} + 08 \times \frac{1}{3600}\text{h}\right) - \left(14\text{ h} + 58 \times \frac{1}{60}\text{h} + 47 \times \frac{1}{3600}\text{h}\right)\\
&= 15 + 3 \times \frac{1}{60} + 08 \times \frac{1}{3600} - 14 - 58 \times \frac{1}{60} - 47 \times \frac{1}{3600}\text{ h}\\
&= \frac{29}{400}\text{ h}\\
&= 0{,}0725
\end{aligned}$$

   La pente mesurant

$$\begin{aligned} 3312 \text{ m} &= 3312 \times \frac{1}{1000}\text{km} \\ &= 3{,}312 \text{ km} \end{aligned}$$

sa vitesse moyenne en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ est :

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{\Delta d}{\Delta t} \\ &= \frac{3{,}312}{0{,}0725} \\ &\approx 45{,}68 \end{aligned}$$

En arrondissant au dixième

$$\boxed{\text{la vitesse moyenne est de } 45{,}7 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.}$$

2. En allant à $100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ il aurait fait la descente en

$$\begin{aligned} \frac{\Delta d}{v} &= \frac{3{,}312 \text{ km}}{100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}} \\ &\frac{3{,}312}{100} \cdot \frac{\text{km}}{\text{km} \cdot \text{h}^{-1}} \\ &= 0{,}03312 \text{ h} \end{aligned}$$

Il serait donc arrivé $0{,}0725 - 0{,}03312 = 0{,}03938$ h avant Albert. Exprimé autrement cela représente : $0{,}03938 \times 3600 \text{ s} = 141{,}768 \text{ s} = 2 \text{ min } 21{,}768$ s.

$$\boxed{\text{Il serait donc arrivé 2 min 21,768 s avant Albert.}}$$

Partie C : saut sur la Streif.

1. Calculons $S(10)$.

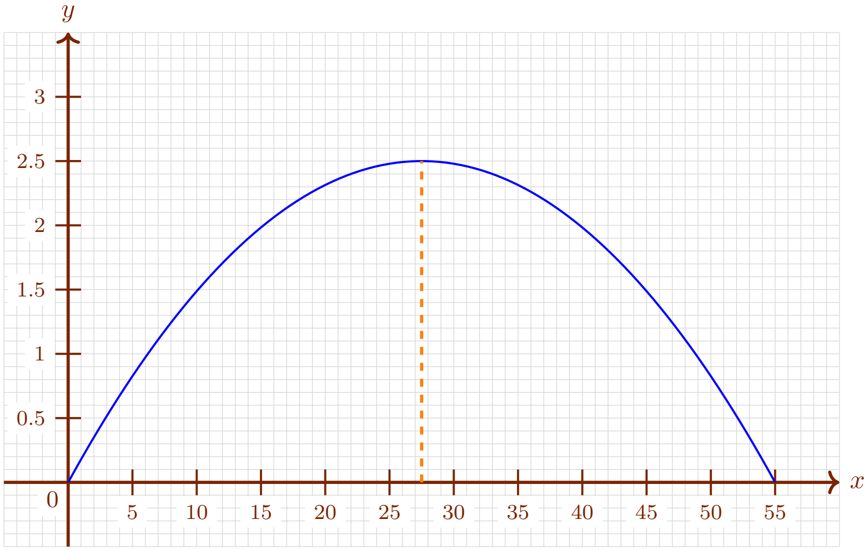
$$\begin{aligned} S(10) &= 2{,}5 - \frac{(2 \times 10 - 55)^2}{1210} \\ &= \frac{180}{121} \\ &\approx 1{,}49 \text{ m} \end{aligned}$$

Ainsi

à 10 m de son point d'envol Albert est à une hauteur d'environ 1,49 m du sol.

2. (a) La valeur 55 représente la distance parcourue (au sol) par Albert lorsqu'il retouche le sol.

(b)



Par lecture graphique

le maximum de hauteur est atteint pour un déplacement horizontal de 27,5 m et la hauteur est alors de 2,5 m.

3. Nous pourrions utiliser le théorème de Fermat ou faire une étude complète des variations de S en calculant sa dérivée mais je préfère ici utiliser une méthode spécifique aux fonctions polynomiales de degré deux.

   Déterminons la forme canonique de S.

   Il est possible de factoriser l'expression de l'énoncé pour trouver la forme canonique mais je choisis de passer par la forme développée.

$$\begin{aligned}
S(x) &= 2{,}5 - \frac{(2x-55)^2}{1210} \\
&= \frac{2{,}5\times 1210}{1210} - \frac{(2x)^2 - 2\times(2x)\times 55 + 55^2}{1210} \\
&= \frac{3025 - \left[4x^2 - 220x + 3025\right]}{1210} \\
&= \frac{-4x^2 + 220x}{1210} \\
&= -\frac{4}{1210}x^2 + \frac{220}{1210}x
\end{aligned}$$

S étant une fonction polynomiale de degré deux dont nous connaissons la forme développée : $a = -\frac{4}{1210}$, $b = \frac{220}{1210}$ et $c = 0$, nous en déduisons la forme canonique $S(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{220}{1210}}{2\times\left(-\frac{4}{1210}\right)} = 27{,}5$.

$\beta = f(\alpha) = f(27{,}5) = 2{,}5$.

D'où : $S(x) = -\frac{4}{1210}(x-27{,}5)^2 + 2{,}5$.

> S admet un maximum égale à 2,5 qui est atteint pour $x = 27{,}5$.

Partie D : tir à la carabine.

1. Notons Q l'événement « toucher la partie quadrillée ».

   Calculons $\mathbb{P}(Q)$.

   L'énoncé nous affirme que, sachant que la cible est touchée, la probabilité qu'une zone de la la cible soit touchée est régie par la loi uniforme et donc par proportionnalité.
   L'aire total de la cible (qui est un disque) est $\mathcal{A}_T = \pi 15^2$.
   L'aire du disque formé par les deux parties non quadrillées : $\mathcal{A}_C = \pi 10^2$.
   Par conséquent la probabilité qu'il touche la partie quadrillée est de

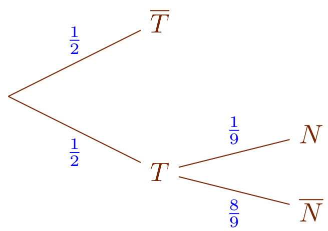
   $$\mathbb{P}(Q) = \frac{\pi 15^2 - \pi 10^2}{\pi 15^2} = \frac{5}{9}.$$

   > $\mathbb{P}(Q) = \frac{5}{9}$.

2. Notons T l'événement « toucher la cible » et N l'événement « atteindre la partie noire ».

   Calculons la probabilité d'atteindre la partie noire.

   En raisonnant comme à la question précédente il est aisé d'obtenir la probabilité d'obtenir la partie noire sachant que la cible est touchée : $\frac{\pi 5^2}{\pi 15^2} = \frac{1}{9}$.
   De plus, d'après l'énoncé, la cible est touchée une fois sur deux : $\mathbb{P}(T) = \frac{1}{2}$.
   La situation peut être représentée par l'arbre ci-dessous.



   D'après le principe multiplicatif (principe des bergers ou formule des probabilités totales)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(TN) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{9}\\ &= \frac{1}{18}\end{aligned}$$

   $\boxed{\text{La probabilité d'atteindre la partie noire est de } \frac{1}{18}.}$

   Calculons $\mathbb{P}(N)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N) &= \mathbb{P}(T)\mathbb{P}_T(N)\\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9}\end{aligned}$$

   $\boxed{\mathbb{P}(N) = \frac{1}{18}.}$

II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

1. Ce problème relève de la division euclidienne.
2. On peut procéder à la division décimale afin de trouver la partie entière du quotient. Il est possible de tâtonner en cherchant un multiple de 5. On peut aussi utiliser les congruences modulo 5.

Exercice 2.

1.
2. (a) Les formules qui conviennent sont $=\mathrm{MOD}(\mathtt{A}2;2)$ et $=\mathrm{MOD}(\mathtt{A}2;\mathtt{B}\$1)$.

   (b) Il faut compléter le tableau jusqu'à la centième ligne et conserver les nombres de la colonne `A` pour lesquelles la ligne est remplie de 1.

Exercice 3

1. Nous conjecturons que : $(n+3)^2-(n+2)^2-(n+1)^2+n^2=4$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
&(n+3)^2-(n+2)^2-(n+1)^2+n^2\\
&=n^2+2\times n\times 3+3^2-\left(n^2+2\times n\times 2+2^2\right)-\left(n^2+2\times n\times 1+1^2\right)+n^2\\
&=n^2+6n+9-n^2-4n-4-n^2-2n-1+n^2\\
&=(1-1-1+1)n^2+(6-4-2)n+9-4-1\\
&=4
\end{aligned}
$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ (n+3)^2-(n+2)^2-(n+1)^2+n^2=4.$$

Exercice 4.

1. Démontrons que $(IJ) \parallel (AC)$ en usant du théorème de Thalès.

   * Configuration de Thalès.
     Les points A, I et B sont distincts et alignés dans cet ordre.
     Les points C, J et B sont distincts et alignés dans cet ordre.
     (AB) et (CB) sont sécantes en B.
   * $ABCD$ est un carré dont I, J, K et L sont les milieux de côtés donc : $\frac{BJ}{BC} = \frac{BI}{BA}$.
   * Des points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès que $(AC) \parallel (IJ)$.

   Ainsi : $(IJ) \parallel (AC)$.

   Démontrons que $IJKL$ est un carré.

   Nous démontrerions de même que $(KL) \parallel (AC)$. Par transitivité :

   $$\left.\begin{array}{l}(IJ) \parallel (AC)\\(KL) \parallel (AC)\end{array}\right\} \Rightarrow (IJ) \parallel (KL).$$

   En procédant de même nous obtiendrions : $(KJ) \parallel (LI)$.
   Ainsi les côtés opposés de $IJKL$ sont parallèles deux à deux et par conséquent $IJKL$ est un parallélogramme.

   Puisque $ABCD$ est un carré et d'après ce que nous avons établi plus haut (avec le théorème de Thalès) : $\frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BD = KL = LI = IJ = JK$.
   Nous en déduisons que le parallélogramme $IJKL$ est un losange.

   AIL est isocèle rectangle en A donc $\widehat{AIL} = \frac{\pi}{4}$. Par symétrie on a de même $\widehat{BIJ} = \frac{\pi}{4}$. On en déduit $\widehat{JIL} = \frac{\pi}{2}$. Par conséquent le losange

   $IJKL$ est un carré.

2. Calculons IJ.

   Puisque BIJ est un triangle rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore : $IJ^2 = IB^2 + BJ^2$.
   Or $ABCD$ est un carré de côté de longueur 12 et I et J sont des milieux de ses côtés donc :

$$\begin{aligned} IJ^2 &= \left(\frac{12}{2}\right)^2 + \left(\frac{12}{2}\right)^2 \\ &= 72 \end{aligned}$$

Donc $IJ = -\sqrt{72}$ ou $IJ = \sqrt{72}$. Mais IJ représentant une longueur c'est un nombre positif donc $IJ = \sqrt{72} = \sqrt{2^2 \times 3^2} = 6\sqrt{2}$.

$$\boxed{IJ = 6\sqrt{2} \text{ cm.}}$$

Calculons l'aire, $\mathcal{A}$, de $IJKL$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= IJ^2 \\ &= \left(6\sqrt{2}\right)^2 \\ &= 72 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{A} = 72 \text{ cm}^2.}$$

3. Calculons le volume, $\mathcal{V}$, de la pyramide $AILM$.

Du fait des angles droits (AM) est la hauteur issue de M. Le volume de la pyramide est donc, d'après la formule rappelée par l'énoncé :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(ALI) \times AM$$

Puisque ALI est rectangle en A :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times AL \times AI\right) \times AM \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 6 \times 6\right) \times 6 \\ &= 36 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{V} = 36 \text{ cm}^3.}$$

4. Déterminons le volume $\mathcal{V}_S$ de ce nouveau solide.

   Le volume du cube est $12^3 = 1728$. Le volume du nouveau solide est donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_S &= 12^3 - 8 \times \mathcal{V} \\ &= 12^3 - 8 \times 36 \\ &= 1440 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le volume du nouveau solide est bien de } 1440 \text{ cm}^3.}$$