Épreuve de mathématiques CRPE 2014 groupe 2.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Durée : 4 heures.
Épreuve notée sur 40.

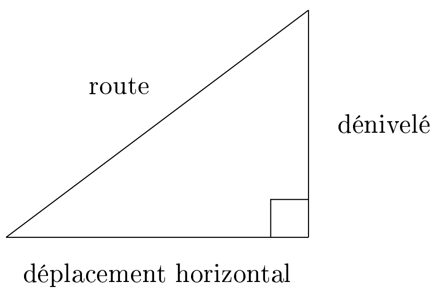
I Première partie (13 points).

Albert part dans les Alpes Autrichiennes, dans la mythique station de ski de Kitzbühel.

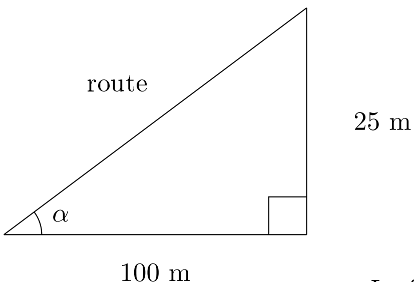
Suivons-le dans son périple et ses diverses activités.

Partie A : la montée à la station.

Sur le dernier tronçon de route montant à la station en ligne droite, Albert a vu un panneau signalant une pente constante de 25 %. La pente est le rapport entre le dénivelé et le déplacement horizontal (théorique).



Ainsi une pente de 25 % indique un dénivelé de 25 m pour un déplacement horizontal de 100 m.



La figure n'est pas à l'échelle

On note α l'angle que la route forme avec l'horizontale. Cet angle est appelé l'inclinaison de la route.

1. Calculer, au degré près, l'inclinaison du dernier tronçon de la route empruntée par Albert.

   Calculons une mesure de α.

   Puisque le triangle est rectangle comme le montre la figure : $\tan(\alpha) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.
   On en déduit a mesure de l'angle au degré près :

   $$\boxed{\alpha \approx 14°.}$$

2. Ce tronçon de route permet de s'élever de 145 m. Calculer sa longueur, au mètre près.

   Déterminons la longueur du tronçon.

   Puisque ce tronçon permet de s'élever de 145 m le déplacement horizontal correspondant est de $\frac{145}{25} \times 100 = 580$ m. Donc, d'après le théorème de Pythagore, le tronçon mesure : $\sqrt{580^2 + 145^2} \approx 598$ m au mètre près.

Partie B : ski sur le Streif.

Sitôt arrivé, Albert décide de dévaler la piste appelée Streif, réputée la plus difficile au monde.

Voici quelques caractéristiques de cette piste :

1. Longueur totale : 3312 m
2. Pente maximale : 85 %
3. Pente minimale : 5 %
4. Dénivelé : 862 m

1. Albert s'élance dans la descente à 14 h 58 min 47 s et termine la descente à 15 h 03 min 08s.
   Calculer sa vitesse moyenne durant cette descente, en km/h, arrondie au dixième.

   Calculons la vitesse moyenne, v_m, durant cette descente.

   La descente dure (en heures) :

$$\begin{aligned}
&(15 \text{ h} + 3 \text{ min} + 08 \text{ s}) - (14 \text{ h} + 58 \text{ min} + 47 \text{ s})\\
&= \left(15 \text{ h} + 3 \times \frac{1}{60}\text{h} + 08 \times \frac{1}{3600}\text{h}\right) - \left(14 \text{ h} + 58 \times \frac{1}{60}\text{h} + 47 \times \frac{1}{3600}\text{h}\right)\\
&= 15 + 3 \times \frac{1}{60} + 08 \times \frac{1}{3600} - 14 - 58 \times \frac{1}{60} - 47 \times \frac{1}{3600} \text{ h}\\
&= \frac{29}{400} \text{ h}\\
&= 0{,}0725
\end{aligned}$$

La pente mesurant

$$\begin{aligned}
3312 \text{ m} &= 3312 \times \frac{1}{1000}\text{km}\\
&= 3{,}312 \text{ km}
\end{aligned}$$

sa vitesse moyenne en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ est :

$$\begin{aligned}
v_m &= \frac{\Delta d}{\Delta t}\\
&= \frac{3{,}312}{0{,}0725}\\
&\approx 45{,}68
\end{aligned}$$

En arrondissant au dixième

$$\boxed{\text{la vitesse moyenne est de } 45{,}7 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.}$$

2. Le meilleur skieur de la station a réalisé la descente à la vitesse moyenne de 100 km/h.
S'il s'était lancé dans la descente au même instant qu'Albert, combien de temps avant lui serait-il arrivé ?

En allant à $100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ il aurait fait la descente en

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta d}{v} &= \frac{3{,}312 \text{ km}}{100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}}\\
&\frac{3{,}312}{100} \cdot \frac{\text{km}}{\text{km} \cdot \text{h}^{-1}}\\
&= 0{,}03312 \text{ h}
\end{aligned}$$

Il serait donc arrivé 0,0725 − 0,03312 = 0,03938 h avant Albert. Exprimé autrement cela représente : 0,03938 × 3600 s = 141,768 s = 2 min 21,768 s.

Il serait donc arrivé 2 min 21,768 s avant Albert.

Partie C : saut sur la Streif.

Lors de sa descente de la Streif, Albert effectue un saut.

On admet que la hauteur du saut d'Albert par rapport au sol de la piste s'exprime en fonction du déplacement horizontal, x, par la fonction S suivante :

$$S : x \mapsto 2{,}5 - \frac{(2x - 55)^2}{1210},$$

x et $S(x)$ étant exprimés en mètre.

1. Calculer l'image de 10 par la fonction S. Interpréter ce résultat en ce qui concerne le saut d'Albert.

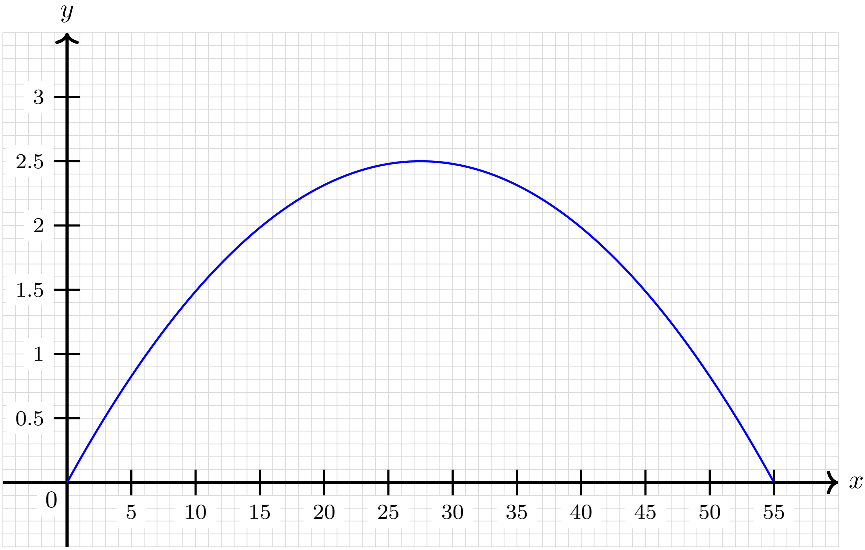
   Calculons $S(10)$.

$$\begin{aligned} S(10) &= 2{,}5 - \frac{(2 \times 10 - 55)^2}{1210} \\ &= \frac{180}{121} \\ &\approx 1{,}49 \text{ m} \end{aligned}$$

   Ainsi

   à 10 m de son point d'envol Albert est à une hauteur d'environ 1,49 m du sol.

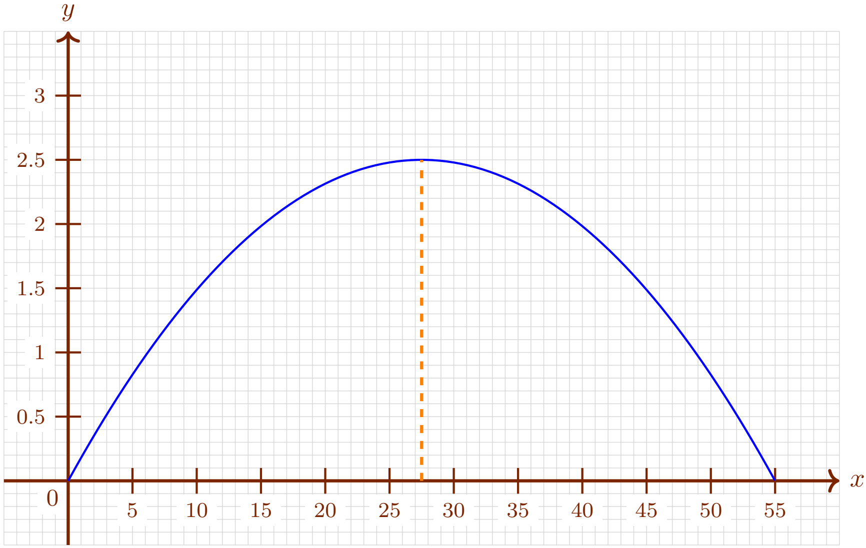
2. On a tracé la courbe représentative de cette fonction S.



(a) Que représente, pour Albert, la valeur 55 sur l'axe des abscisses ?

La valeur 55 représente la distance parcourue (au sol) par Albert lorsqu'il retouche le sol.

(b) Déterminer graphiquement quelle a été la hauteur maximale du saut d'Albert. À quel déplacement horizontal cette valeur correspond-elle ?



Par lecture graphique

le maximum de hauteur est atteint pour un déplacement horizontal de 27,5 m et la hauteur est alors de 2,5 m.

3. À l'aide de l'expression de la fonction S, retrouver, par le calcul, la hauteur maximale du saut d'Albert.

Nous pourrions utiliser le théorème de Fermat ou faire une étude complète des variations de S en calculant sa dérivée mais je préfère ici utiliser une méthode spécifique aux fonctions polynomiales de degré deux.

Déterminons la forme canonique de S.

Il est possible de factoriser l'expression de l'énoncé pour trouver la forme canonique mais je choisis de passer par la forme développée.

$$\begin{aligned}
S(x) &= 2{,}5 - \frac{(2x-55)^2}{1210} \\
&= \frac{2{,}5 \times 1210}{1210} - \frac{(2x)^2 - 2\times(2x)\times 55 + 55^2}{1210} \\
&= \frac{3025 - \left[4x^2 - 220x + 3025\right]}{1210} \\
&= \frac{-4x^2 + 220x}{1210} \\
&= -\frac{4}{1210}x^2 + \frac{220}{1210}x
\end{aligned}$$

S étant une fonction polynomiale de degré deux dont nous connaissons la forme développée : $a = -\frac{4}{1210}$, $b = \frac{220}{1210}$ et $c = 0$, nous en déduisons la forme canonique $S(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{220}{1210}}{2\times\left(-\frac{4}{1210}\right)} = 27{,}5$.

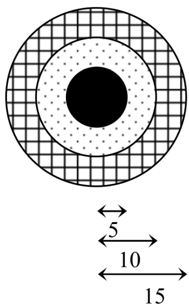
$\beta = f(\alpha) = f(27{,}5) = 2{,}5$.

D'où : $S(x) = -\frac{4}{1210}(x-27{,}5)^2 + 2{,}5$.

S admet un maximum égale à 2,5 qui est atteint pour $x = 27{,}5$.

Partie D : tir à la carabine.

Albert observe ensuite un entraînement au tir à la carabine sur une cible. La cible est constituée de trois disques concentriques de rayons respectifs 5 cm, 10 cm et 15 cm, comme schématisé ci-dessous.



Les mesures des rayons ci-dessus sont en centimètres

Un débutant touche la cible une fois sur deux.

Lorsqu'il atteint la cible, la probabilité qu'il atteigne une zone donnée est proportionnelle à l'aire de cette zone.

1. Un tireur débutant touche la cible. Quelle probabilité a-t-il d'atteindre la couronne extérieure (partie quadrillée) ?

   Notons Q l'événement « toucher la partie quadrillée ».

   Calculons $\mathbb{P}(Q)$.

   L'énoncé nous affirme que, sachant que la cible est touchée, la probabilité qu'une zone de la la cible soit touchée est régie par la loi uniforme et donc par proportionnalité.
   L'aire total de la cible (qui est un disque) est $\mathcal{A}_T = \pi 15^2$.
   L'aire du disque formé par les deux parties non quadrillées : $\mathcal{A}_C = \pi 10^2$.
   Par conséquent la probabilité qu'il touche la partie quadrillée est de

   $$\mathbb{P}(Q) = \frac{\pi 15^2 - \pi 10^2}{\pi 15^2} = \frac{5}{9}.$$

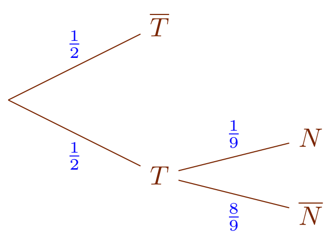
   $$\boxed{\mathbb{P}(Q) = \frac{5}{9}.}$$

2. Un tireur débutant va appuyer sur la détente. Quelle probabilité a-t-il de toucher la cible et d'atteindre son cœur (partie noire) ?

   Notons T l'événement « toucher la cible » et N l'événement « atteindre la partie noire ».

   Calculons la probabilité d'atteindre la partie noire.

   En raisonnant comme à la question précédente il est aisé d'obtenir la probabilité d'obtenir la partie noire sachant que la cible est touchée : $\frac{\pi 5^2}{\pi 15^2} = \frac{1}{9}$.
   De plus, d'après l'énoncé, la cible est touchée une fois sur deux : $\mathbb{P}(T) = \frac{1}{2}$.
   La situation peut être représentée par l'arbre ci-dessous.



D'après le principe multiplicatif (principe des bergers ou formule des probabilités totales)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(TN) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{9} \\ &= \frac{1}{18}\end{aligned}$$

La probabilité d'atteindre la partie noire est de $\frac{1}{18}$.

Calculons $\mathbb{P}(N)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N) &= \mathbb{P}(T)\mathbb{P}_T(N) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9}\end{aligned}$$

$\mathbb{P}(N) = \frac{1}{18}$.

II Deuxième partie (13 points).

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1.

En classe de CM2, un professeur propose l'exercice suivant :

> Mathis a effeuillé des fleurs à 5 pétales en disant « j'aime les maths... un peu..., beaucoup..., passionnément ..., à la folie ». Il a ôté 83 pétales en tout. Il n'est passé à la fleur suivante que lorsqu'il avait complètement effeuillé la fleur précédente.
> Combien de fleurs a-t-il effeuillées en totalité ? Sur la dernière fleur qu'il a effeuillée, reste-t-il des pétales ?

1. De quelle opération mathématique ce problème relève t-il ?

   Ce problème relève de la division euclidienne.

2. Proposer trois procédures possibles pour répondre à la question posée.

   On peut procéder à la division décimale afin de trouver la partie entière du quotient. Il est possible de tâtonner en cherchant un multiple de 5. On peut aussi utiliser les congruences modulo 5.

Exercice 2.

Emma propose à son ami Jules de lui donner ses bonbons à la condition qu'il trouve exactement combien elle en a. Emma lui dit qu'elle a moins de 100 bonbons et que lorsqu'elle les regroupe par deux, trois, quatre, cinq ou six, il lui en reste toujours un.

1. Combien Emma a-t-elle de bonbons ? Justifier la réponse en explicitant la démarche utilisée.

   Soit $n \in [\![1\ ;\ 100]\!]$ le nombre de bonbons de Emma.
   Par hypothèse $n-1$ est congru 0 modulo à 2, 3, 4, 5 et 6. Donc $n-1$ est un multiple de 4, 3 et 5 (puisque $6 = 2 \times 3$). Donc n est congru à 1 modulo 60.
   Autrement dit : $n = 61$.
   Réciproquement si $n = 61$, alors les conditions de l'énoncé sont évidemment respectées.

2. Pour vérifier sa réponse, Jules décide d'utiliser un tableur. Pour cela, il utilise la fonction MOD(*nombre*; *diviseur*), qui donne le reste de la division euclidienne du *nombre* par le *diviseur*.

   Jules a prévu de calculer en colonne les restes de la division euclidienne des nombres de la colonne `A` par 2, 3, 4, 5 et 6.

	A	B	C	D	E	F
1		2	3	4	5	6
2	1					
3	2					
4	3					
5	4					
6	5					
7	6					
8	7					
9	8					
10	9					
11	10					
12	11					
13	12					
14	13					
15	14					

(a) Parmi les formules suivantes, en choisir une qui pourrait être insérée dans la cellule `B2` et qui pourrait, en étant étendue vers le bas, compléter correctement la colonne `B` :

$= \mathrm{MOD}(1;2)$	$= \mathrm{MOD}(\mathtt{A2};\mathtt{B1})$	$= \mathrm{MOD}(\mathtt{A2};2)$
$= MOD(1;\mathtt{B1})$	$= \mathrm{MOD}(\mathtt{A2};\mathtt{B\$1})$	$= \mathrm{MOD}(2;1)$

Les formules qui conviennent sont $= \mathrm{MOD}(\mathtt{A2};2)$ et $= \mathrm{MOD}(\mathtt{A2};\mathtt{B\$1})$.

(b) Jules a rempli de la même façon le reste du tableau. Comment peut-il l'utiliser pour résoudre ce problème ?

Il faut compléter le tableau jusqu'à la centième ligne et conserver

les nombres de la colonne `A` pour lesquelles la ligne est remplie de 1.

Exercice 3

On effectue à la calculatrice les calculs ci-dessous :

$$123^2 - 122^2 - 121^2 + 120^2 = 4$$
$$45^2 - 44^2 - 43^2 + 42^2 = 4$$

1. Tester ce résultat surprenant sur une autre série de quatre nombres consécutifs et émettre une conjecture.

Nous conjecturons que : $(n+3)^2 - (n+2)^2 - (n+1)^2 + n^2 = 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Prouver que la conjecture faite précédemment est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

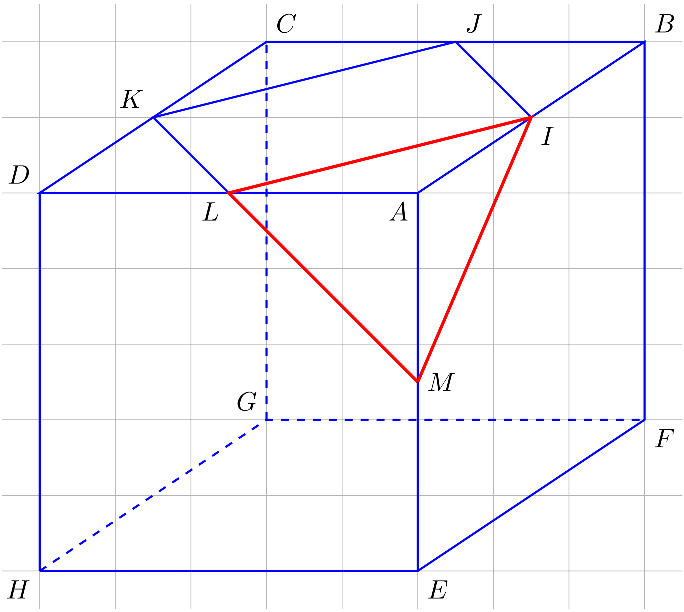
$$\begin{aligned}
&(n+3)^2-(n+2)^2-(n+1)^2+n^2\\
&=n^2+2\times n\times 3+3^2-\left(n^2+2\times n\times 2+2^2\right)-\left(n^2+2\times n\times 1+1^2\right)+n^2\\
&=n^2+6n+9-n^2-4n-4-n^2-2n-1+n^2\\
&=(1-1-1+1)n^2+(6-4-2)n+9-4-1\\
&=4
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ (n+3)^2-(n+2)^2-(n+1)^2+n^2=4.}$$

Exercice 4.

Soit $ABCDEFGH$ un cube de côté 12 cm.

On note I le milieu de $[AB]$, J celui de $[BC]$, K celui de $[CD]$, L celui de $[AD]$ et M celui de $[AE]$.



1. Démontrer que $IJKL$ est un carré.

Démontrons que $(IJ)\parallel(AC)$ en usant du théorème de Thalès.

* Configuration de Thalès.
  Les points A, I et B sont distincts et alignés dans cet ordre.
  Les points C, J et B sont distincts et alignés dans cet ordre.
  (AB) et (CB) sont sécantes en B.
* $ABCD$ est un carré dont I, J, K et L sont les milieux de côtés donc : $\frac{BJ}{BC} = \frac{BI}{BA}$.
* Des points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès que $(AC) \parallel (IJ)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } (IJ) \parallel (AC).}$$

Démontrons que $IJKL$ est un carré.

Nous démontrerions de même que $(KL) \parallel (AC)$. Par transitivité :

$$\left.\begin{array}{l}(IJ) \parallel (AC)\\(KL) \parallel (AC)\end{array}\right\} \Rightarrow (IJ) \parallel (KL).$$

En procédant de même nous obtiendrions : $(KJ) \parallel (LI)$.
Ainsi les côtés opposés de $IJKL$ sont parallèles deux à deux et par conséquent $IJKL$ est un parallélogramme.

Puisque $ABCD$ est un carré et d'après ce que nous avons établi plus haut (avec le théorème de Thalès) : $\frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BD = KL = LI = IJ = JK$.
Nous en déduisons que le parallélogramme $IJKL$ est un losange.

AIL est isocèle rectangle en A donc $\widehat{AIL} = \frac{\pi}{4}$. Par symétrie on a de même $\widehat{BIJ} = \frac{\pi}{4}$. On en déduit $\widehat{JIL} = \frac{\pi}{2}$. Par conséquent le losange

$$\boxed{IJKL \text{ est un carré.}}$$

2. Calculer l'aire du carré $IJKL$ (en cm^2).

   Calculons IJ.

   Puisque BIJ est un triangle rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore : $IJ^2 = IB^2 + BJ^2$.
   Or $ABCD$ est un carré de côté de longueur 12 et I et J sont des milieux de ses côtés donc :

$$\begin{aligned} IJ^2 &= \left(\frac{12}{2}\right)^2 + \left(\frac{12}{2}\right)^2 \\ &= 72 \end{aligned}$$

Donc $IJ = -\sqrt{72}$ ou $IJ = \sqrt{72}$. Mais IJ représentant une longueur c'est un nombre positif donc $IJ = \sqrt{72} = \sqrt{2^2 \times 3^2} = 6\sqrt{2}$.

$$\boxed{IJ = 6\sqrt{2} \text{ cm.}}$$

Calculons l'aire, $\mathcal{A}$, de $IJKL$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= IJ^2 \\ &= \left(6\sqrt{2}\right)^2 \\ &= 72 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{A} = 72 \text{ cm}^2.}$$

3. $AILM$ est une pyramide à base triangulaire. Calculer le volume de cette pyramide (en cm^3).
   Rappel :

$$\text{volume d'une pyramide} = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}.$$

Calculons le volume, $\mathcal{V}$, de la pyramide $AILM$.

Du fait des angles droits (AM) est la hauteur issue de M. Le volume de la pyramide est donc, d'après la formule rappelée par l'énoncé :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(ALI) \times AM$$

Puisque ALI est rectangle en A :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times AL \times AI\right) \times AM \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 6 \times 6\right) \times 6 \\ &= 36 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$\mathcal{V} = 36 \text{ cm}^3.$$

4. On ôte au cube en chacun de ses huit sommets une pyramide identique à $AILM$ pour créer un nouveau solide. Vérifier que le volume de ce nouveau solide est 1440 cm^3.

Déterminons le volume $\mathcal{V}_S$ de ce nouveau solide.

Le volume du cube est $12^3 = 1728$. Le volume du nouveau solide est donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_S &= 12^3 - 8 \times \mathcal{V} \\ &= 12^3 - 8 \times 36 \\ &= 1440\end{aligned}$$

Le volume du nouveau solide est bien de 1440 cm^3.