

Épreuve de mathématiques CRPE 2014 groupe 1.

Lien vers le corrigé seul : [pdf](#).

Durée : 4 heures.

Épreuve notée sur 40.

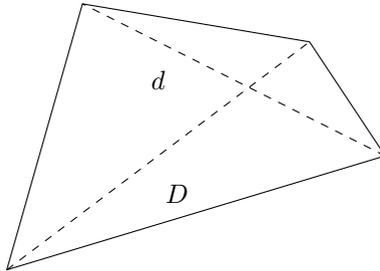
I Première partie (13 points).

Dans ce problème, on s'intéresse à différentes méthodes de calcul ou d'estimation de l'aire de certains quadrilatères.

Partie A : chez les Mayas.

Les civilisations anciennes utilisaient divers procédés pour estimer les aires des champs. Les Mayas, par exemple, estimaient l'aire d'un quadrilatère en calculant le demi-produit des longueurs des diagonales.

$$\text{Aire} \approx \frac{D \times d}{2}.$$



1. Justifier que cette estimation Maya donne la valeur exacte de l'aire d'un carré de côté a .
2. On considère un rectangle de longueur 4cm et de largeur 3 cm.
La formule Maya donne-t-elle la valeur exacte de l'aire de ce rectangle ?

Partie B : chez les Indiens.

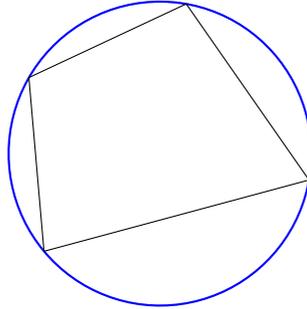
On dit qu'un quadrilatère est inscriptible dans un cercle si ses quatre sommets sont des points de ce cercle.

C'est le cas du quadrilatère ci-dessous.

Brahmagupta, mathématicien indien du VII^e siècle, a établi une formule donnant l'aire d'un tel quadrilatère lorsqu'il est non croisé :

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

où a, b, c et d sont les longueurs des côtés du quadrilatère et p son **demi-périmètre**.



1. Étude d'une configuration particulière.

- (a) Construire un cercle Γ et deux points A et C diamétralement opposés sur ce cercle.

Placer un point B sur le cercle Γ distinct des points A et C .

Construire le point D , symétrique du point B par rapport à la droite (AC) .

Laisser apparents les traits de construction.

- (b) Justifier que le quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans le cercle Γ .
- (c) Exprimer l'aire du quadrilatère $ABCD$ en fonction des longueurs AB et BC en utilisant la formule de Brahmagupta. *On admettra que le quadrilatère $ABCD$ est non croisé.*
- (d) Retrouver l'expression précédente de l'aire du quadrilatère $ABCD$ par une autre méthode.

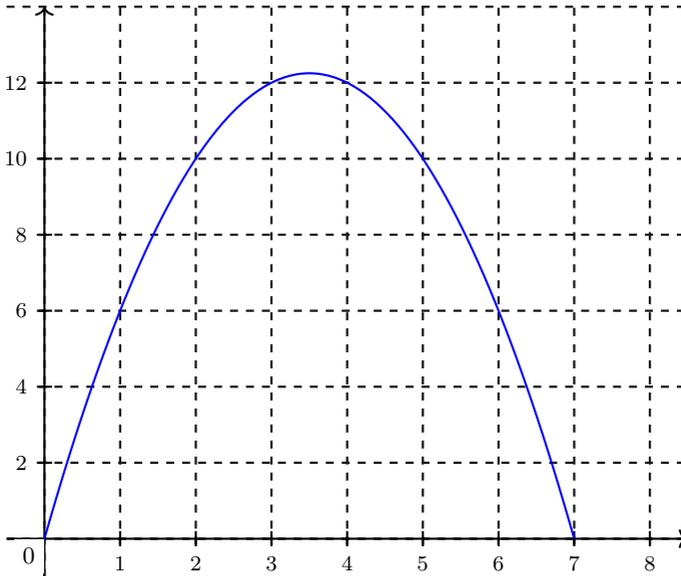
Étude d'une autre configuration particulière : le rectangle.

2. (a) Justifier qu'un rectangle est inscrit dans un cercle.
- (b) À l'aide de la formule de Brahmagupta, retrouver l'expression usuelle de l'aire d'un rectangle de longueur et de largeur.

Partie C : à l'ère du tableur.

On s'intéresse à l'aire des rectangles dont le **périmètre est 14 cm**.

On note x la mesure en cm d'un des côtés d'un tel rectangle. La fonction A qui à x associe l'aire $A(x)$ en cm^2 du rectangle est représentée ci-dessous.



1. Pourquoi se limite-t-on à des valeurs de x comprises entre 0 et 7 ?

2. Étude graphique.

Répondre aux questions suivantes, par lecture de la représentation graphique de la fonction A .

- Quelles sont les dimensions d'un rectangle de périmètre 14 cm et d'aire 10 cm^2 ?
- Encadrer par deux nombres entiers consécutifs la valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle semble maximale.
- Encadrer par deux nombres entiers consécutifs la valeur de l'aire maximale du rectangle.

Poursuite de l'étude à l'aide d'un tableur.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	x	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4	
2	A(x)	12	12,09	12,16	12,21	12,24	12,25	12,24	12,21	12,16	12,09	12	
3													
4													

3. (a) Proposer une formule qui, entrée dans la cellule B2 et recopiée vers la droite, a permis d'obtenir les valeurs de $A(x)$ sur la ligne 2.
- (b) À partir du tableau ci-dessus, améliorer l'encadrement de la valeur de x obtenu par lecture graphique à la question 2. b). Donner alors une estimation de la valeur de l'aire maximale.

4. Détermination des valeurs exactes.

- (a) Justifier que pour tout x de l'intervalle $[0; 7]$, on a

$$A(x) = \frac{49}{4} - \left(x - \frac{7}{2}\right).$$

- (b) Pour quelle valeur de x l'aire $A(x)$ est-elle maximale? Justifier.
Quelle est la valeur maximale de $A(x)$?
- (c) Que peut-on dire du rectangle de périmètre 14 cm et d'aire maximale?

II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

Le cross du collège a eu lieu. 200 élèves de troisième ont franchi la ligne d'arrivée. Voici les indicateurs des performances réalisées en minutes.

Minimum	Premier quartile	Médiane	Troisième quartile	Moyenne	Étendue
12,5	14,8	15,7	16,3	15,4	4,2

Répondre aux questions suivantes en justifiant.

1. Quelle est la performance en minutes du dernier arrivé?

2. Quelle est la somme des 200 performances en minutes ?
3. Ariane est arrivée treizième. Donner l'encadrement le plus précis possible de sa performance en minutes.
4. L'affirmation suivante est-elle vraie ?
Affirmation : Plus de 50 % des élèves ont mis un temps supérieur au temps moyen.

Exercice 2

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.

Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point. Une réponse fausse n'enlève pas de point.

1. **Affirmation 1** : La somme de cinq nombres entiers consécutifs est un multiple de 5.
2. **Affirmation 2** : La somme des angles d'un pentagone convexe est égale à 540° .
3. On dispose du plan d'une maison à l'échelle 1/50.
Affirmation 3 : Les aires sur le plan sont 50 fois plus petites que les aires réelles.
4. Shéhérazade commence à lire un conte un lundi soir. Elle lit 1 001 nuits consécutives.
Affirmation 4 : Elle terminera un dimanche soir.

Exercice 3.

Pour s'entraîner, un cycliste effectue un parcours aller-retour entre deux villes A et B distantes de 45 km. Il part de la ville A à 9 h 30 et on considère qu'à l'aller, il roule à une vitesse constante de 30 km/h. Après un repos d'une heure, il repart de la ville B et cette fois-ci rejoint la ville A à la vitesse constante de 50 km/h.

1. À quelle heure arrive-t-il à la ville B ?
2. Représenter graphiquement la distance entre le cycliste et la ville A sur l'intégralité du parcours. On placera en abscisse l'heure de la journée et en ordonnée la distance entre le cycliste et la ville A exprimée en km.
3. À quelle heure est-il de retour à la ville A ? Donner le résultat en heures et minutes.

Exercice 4.

On considère un dé à quatre faces en forme de tétraèdre régulier. Ses quatre faces sont numérotées de 1 à 4. Le résultat d'un lancer est le nombre indiqué sur la face sur laquelle repose le dé.

Le dé est supposé équilibré.

1. On a lancé le dé six fois et obtenu la série de résultats : 1 ; 2 ; 4 ; 1 ; 1 ; 2.
Au 7^e lancer, la probabilité d'obtenir le nombre 1 et celle d'obtenir le nombre 3 sont-elles différentes ?
2. On lance le dé deux fois de suite.
 - (a) Quelle est la probabilité d'obtenir une seule fois le nombre 1 lors de ces deux lancers ?
 - (b) Quelle est la probabilité que le nombre obtenu au deuxième lancer soit strictement supérieur au nombre obtenu au premier lancer ?