Épreuve de mathématiques CRPE 2014 groupe 1.

Lien vers le sujet seul : pdf.

I Première partie (13 points).

Partie A : chez les Mayas.

1. Déterminons l'aire donnée par la formule maya pour un carré.

   L'aire d'un carré de côté a est a^2.
   La diagonale d'un carré de côté a, a, d'après le théorème de Pythagore, une longueur de $a\sqrt{2}$. Puisque c'est un rectangle ses diagonales ont même longueur et leur produit vaut donc : $(a\sqrt{2})^2 = a^2$.
   Ainsi :

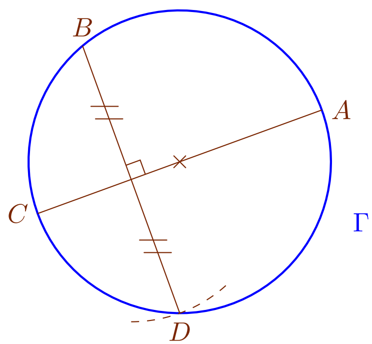
   L'estimation des Maya donne l'aire exacte dans le cas d'un carré.

2. Calculons les aires du rectangle et celle renvoyée par la formule maya.

   Pour un rectangle les diagonales ont la même longueur.
   Par le théorème de Pythagore il est aisé d'obtenir la mesure de cette diagonale : $\sqrt{(4^2+3^2)} = 5$.
   L'approximation de l'aire obtenue par les Maya est donc : $D \times d = 5 \times 5 = 25$, alors que l'aire est $4 \times 3 = 12$.

   La formule des Maya ne donne pas l'aire exacte du rectangle.

Partie B : chez les Indiens.



1. (a)

(b) Par construction A et B sont sur le cercle.

C est le symétrique A par rapport au centre du cercle donc est aussi sur le cercle.

Puisque (AC) est un diamètre de Γ, le symétrique de Γ par rapport à (AC) est Γ lui-même. En particulier le symétrique de B, c'est-à-dire D est aussi sur Γ.

$ABCD$ est inscriptible dans Γ.

(c) Déterminons l'aire, S, de $ABCD$.

Puisque $ABCD$ est inscrit dans Γ et qu'il est non croisé nous pouvons utiliser la formule de l'énoncé :

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Or en utilisant les symétries remarquées à la question précédente, nous obtenons $p = AB + BC$ et

$$\begin{aligned}
p - a &= AB + BC - AB = BC \\
p - b &= AB + BC - BC = AB \\
p - c &= AB + BC - AB = BC \\
p - d &= AB + BC - BC = AB
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
S &= \sqrt{BC \times AB \times BC \times AB} \\
&= \sqrt{AB^2 \times BC^2}
\end{aligned}$$

Puisqu'il s'agit de longueurs ce sont des nombres positifs donc

$$S = AB \times BC$$

$$S = AB \cdot BC.$$

(d) Déterminons l'aire S' de $ABCD$.

Γ est circonscrit à ABC et $[AC]$ en est un diamètre donc ABC est rectangle en B. Doc l'aire de ce triangle est

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2} AB \times BC$$

Par symétrie nous avons de même

$$\mathscr{A}(ACD) = \frac{1}{2} AB \times BC.$$

Finalement nous en déduisons l'aire de $ABCD$.

$$\boxed{S' = AB \cdot BC.}$$

2. (a) Les diagonales d'un rectangle sont de même longueur et se coupent en leur milieu. Donc tout rectangle est inscrit dans le cercle de centre le centre du rectangle et dont le rayon a pour longueur la moitié d'une diagonale.

Un rectangle est inscriptible dans un cercle.

(b) Déterminons l'aire du rectangle.

D'après la question précédente les rectangles sont inscrits dans un cercle et, de plus, ne sont pas croisés, nous pouvons donc utiliser la formule de Brahmagupta.

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Or $p = a + b$, $a = c$ et $b = d$ donc

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{(a+b-a)(a+b-b)(a+b-a)(a+b-b)} \\ &= \sqrt{b^2 a^2} \end{aligned}$$

Puisque $a \geq 0$ et $b \geq 0$ (car ce sont des longueurs)

$$S = ab$$

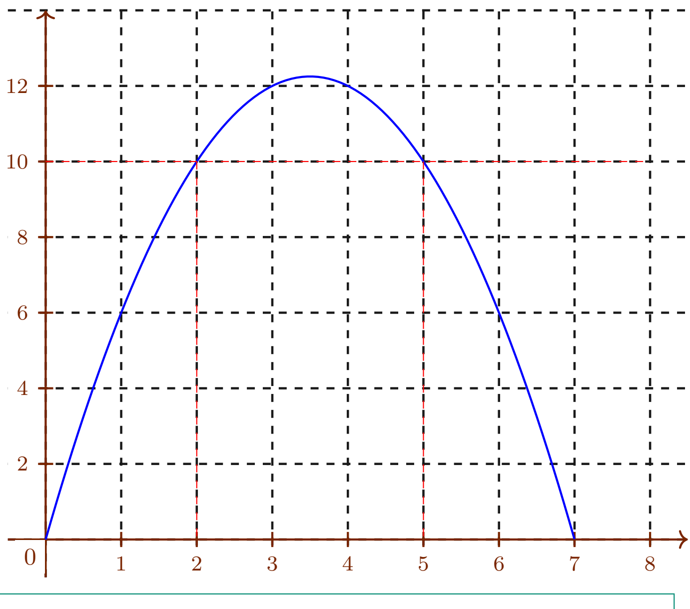
En notant $a = l$ la larguer et $b = L$ la longueur nous retrouvons bien que

> l'aire d'un rectangle est $l \times L$.

Partie C : à l'ère du tableur.

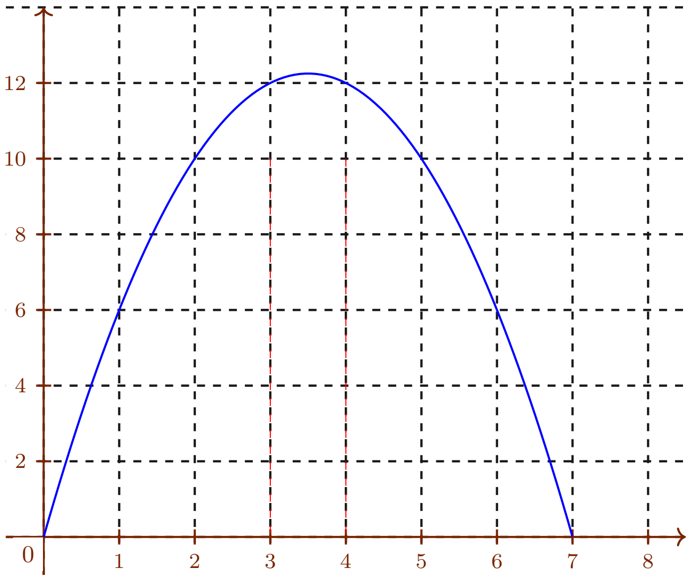
1. x désignant une longueur, c'est un nombre positif : $x \geq 0$.
   Notons y la longueur de l'autre côté du rectangle. Nous avons alors : $2(x+y) = 14$ et donc $x + y \leq 7$. Puisque $y \geq 0$, nécessairement : $x \leq 7$.

   > $x \in [0; 7]$.



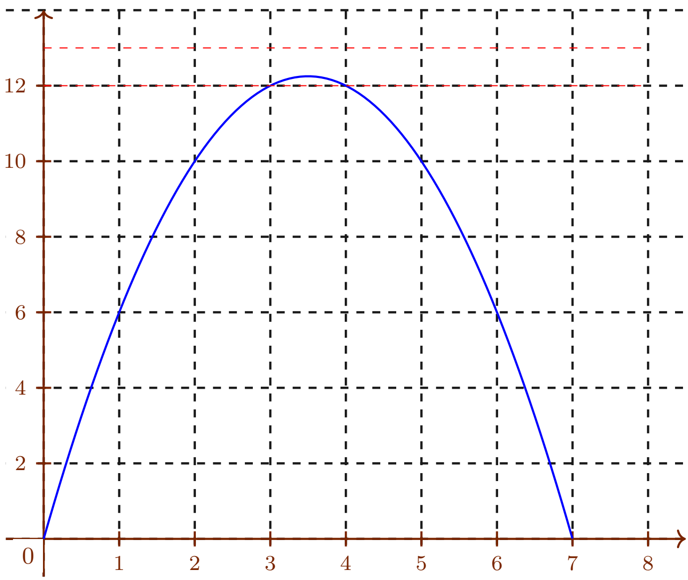
2. (a)

> Les dimensions d'un rectangle de périmètre 14 cm et d'aire 10 cm^2 sont 2 et 5 cm.



(b)

L'aire semble maximale pour : $3 \leq x \leq 4$.



(c)

L'aire maximale $\mathcal{A}$ vérifie l'encadrement : $12 \leq \mathcal{A} \leq 13$.

3. (a) =B2*(12-B2)

   (b) Nous lisons :

   L'aire maximale est obtenue lorsque $3{,}4 \leq \leq 3{,}6$ et alors $\mathcal{A} \approx 12{,}25$.

4. (a) Déterminons $A(x)$.

   Comme nous l'avions remarqué : $x + y = 7$, et donc $y = 7 - x$. Par conséquent l'aire du rectangle est

$$A(x) = x(7 - x).$$

   Démontrons maintenant que la formule proposée est bien celle de $A(x)$.
   Soit $x \in [0\ ;\ 7]$.
   On peut développer avec une identité remarquable.

$$\begin{aligned} \frac{49}{4} - \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 &= \frac{49}{4} - \left(x^2 - 7x + \frac{7^2}{2^2}\right) \\ &= -x^2 + 7x \\ &= x(7 - x) \\ &= \mathcal{A}(x) \end{aligned}$$

   Donc

$$\forall x \in [0;\ 7],\ \mathcal{A}(x) = \frac{49}{4} - \left(x - \frac{7}{2}\right)^2.$$

   (b) Nous avons établi la forme canonique de la fonction polynomiale de degré deux , A, donc

   le maximum de A est $\frac{49}{4}$ et il est atteint pour $x = \frac{7}{2}$.

(c) Le rectangle d'aire maximale et de périmètre 14 cm est un carré de côté $\frac{7}{2}$.

II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

1. La performance du dernier arrivé est $12{,}5 + 4{,}2 = 16{,}7$ minutes.

2. La somme des 200 performances en minutes est $200 \times 15{,}4 = 610$ minutes.

3. La treizième position se situe avant l'effectif correspondant au premier quartile, qui est la position $\frac{200}{4} = 50$. Donc le temps mis par Ariane, T_A vérifie

$$12{,}5 \leq Temps_A \leq 14{,}8.$$

4. L'affirmation est vraie car la médiane, 15,7, est supérieure à la moyenne, 15,4.

L'affirmation est vraie.

Exercice 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) &= 5n + 10 \\ &= 5(n+2) \end{aligned}$$

L'affirmation 1 est vraie.

2. On peut inscrire le pentagone régulier dans un cercle de centre O. Dans les triangles isocèles en O ainsi formés la somme des angles à la base égale $180 - \frac{360}{5} = 108°$.
   En sommant tous ces angles à la base on obtient : $5 \times 108 = 540°$.

   L'affirmation 2 est vraie.

3. Considérons par exemple un carré d'aire 1. Son aire sera $\left(\frac{1}{50}\right)^2 = \frac{1}{2\,500}$.

   L'affirmation 3 est fausse.

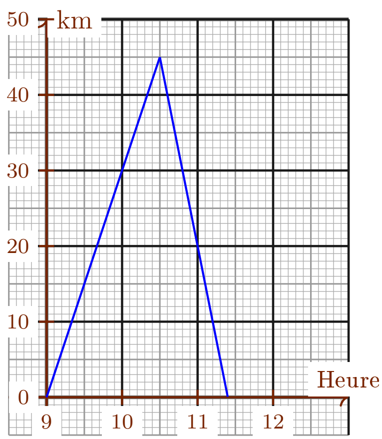
4. $1001 = 143 \times 7$.
   Elle lira donc sa dernière histoire un dimanche soir.

   L'affirmation 4 est vraie.

Exercice 3.

1. Puisqu'il roule à 30km.h^{-1} il parcourra 45 km en $\frac{45}{30} = 1{,}5$ h.

   Il arrivera à B à 11 heure.

2. 

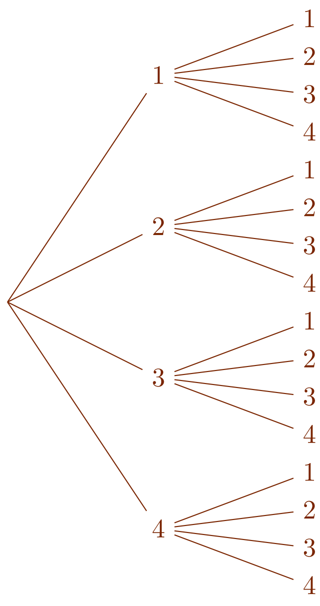
3. Déterminons l'heure de son retour.

   Pour faire 45 km à 50km.h^{-1} il met : $\frac{45}{50} = 0{,}9$ h.
   Donc le trajet aller-retour prend $1{,}5 + 0{,}9 = 2{,}4$ h $= 2$ h $+ \frac{4}{10} \times 60$ mn.
   Autrement dit

   le trajet dure 2 heures et 24 minutes.

Exercice 4.

1. Les expériences sont indépendantes les probabilités ne sont donc pas modifiées.



2.

   (a) Cette expérience peut être assimilée à un tirage avec remise. Il y a 2×3 issues qui réalisent cet événement parmi les $4 \times 4 = 16$ issues toutes équiprobables possibles. Donc la probabilité d'obtenir une seule fois le nombre 1 est de $\frac{6}{16}$.

   $P(1) = \frac{3}{8}$.

(b) Notons A : « le nombre obtenu au deuxième lancer est strictement supérieur au nombre obtenu au premier lancer ».
$A = \{(1;2),\ (1;3),\ (1;4),\ (2;3),\ (2;4),\ (3;4)\}$.
Il y a équiprobabilité, A est réalisé par 6 issues et l'univers comporte 16 issues donc

$$P(A) = \frac{6}{16}.$$

$$\boxed{P(A) = \tfrac{3}{8}.}$$