Épreuve de mathématiques CRPE 2014 groupe 1.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Durée : 4 heures.
Épreuve notée sur 40.

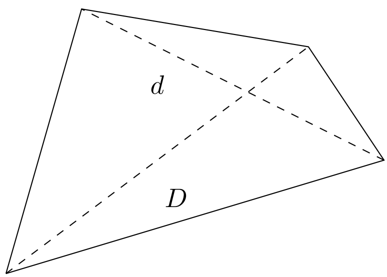
I Première partie (13 points).

Dans ce problème, on s'intéresse à différentes méthodes de calcul ou d'estimation de l'aire de certains quadrilatères.

Partie A : chez les Mayas.

Les civilisations anciennes utilisaient divers procédés pour estimer les aires des champs. Les Mayas, par exemple, estimaient l'aire d'un quadrilatère en calculant le demi-produit des longueurs des diagonales.

$$Aire \approx \frac{D \times d}{2}.$$



1. Justifier que cette estimation Maya donne la valeur exacte de l'aire d'un carré de côté a.

   Déterminons l'aire donnée par la formule maya pour un carré.

   L'aire d'un carré de côté a est a^2.
   La diagonale d'un carré de côté a, a, d'après le théorème de Pythagore, une longueur de $a\sqrt{2}$. Puisque c'est un rectangle ses diagonales ont même longueur et leur produit vaut donc : $(a\sqrt{2})^2 = a^2$.
   Ainsi :

L'estimation des Maya donne l'aire exacte dans le cas d'un carré.

2. On considère un rectangle de longueur 4cm et de largeur 3 cm.
La formule Maya donne-t-elle la valeur exacte de l'aire de ce rectangle ?

Calculons les aires du rectangle et celle renvoyée par la formule maya.

Pour un rectangle les diagonales ont la même longueur.
Par le théorème de Pythagore il est aisé d'obtenir la mesure de cette diagonale : $\sqrt{(4^2 + 3^2)} = 5$.
L'approximation de l'aire obtenue par les Maya est donc : $D \times d = 5 \times 5 = 25$, alors que l'aire est $4 \times 3 = 12$.

La formule des Maya ne donne pas l'aire exacte du rectangle.

Partie B : chez les Indiens.

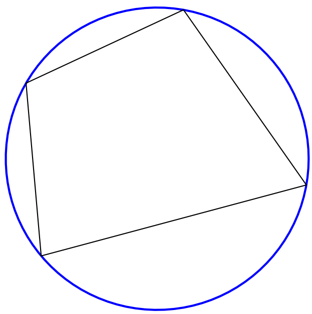
On dit qu'un quadrilatère est inscriptible dans un cercle si ses quatre sommets sont des points de ce cercle.

C'est le cas du quadrilatère ci-dessous.

Brahmagupta, mathématicien indien du VII^e siècle, a établi une formule donnant l'aire d'un tel quadrilatère lorsqu'il est non croisé :

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

où a, b, c et d sont les longueurs des côtés du quadrilatère et p son **demi-périmètre**.



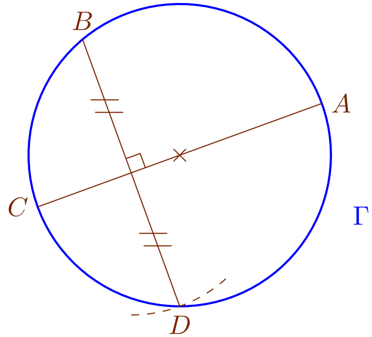
1. **Étude d'une configuration particulière.**

(a) Construire un cercle Γ et deux points A et C diamétralement opposés sur ce cercle.

Placer un point B sur le cercle Γ distinct des points A et C.

Construire le point D, symétrique du point B par rapport à la droite (AC).

Laisser apparents les traits de construction.



(b) Justifier que le quadrilatère $ABCD$ est inscriptible dans le cercle Γ.

Par construction A et B sont sur le cercle.

C est le symétrique A par rapport au centre du cercle donc est aussi sur le cercle.

Puisque (AC) est un diamètre de Γ, le symétrique de Γ par rapport à (AC) est Γ lui-même. En particulier le symétrique de B, c'est-à-dire D est aussi sur Γ.

$ABCD$ est inscriptible dans Γ.

(c) Exprimer l'aire du quadrilatère $ABCD$ en fonction des longueurs AB et BC en utilisant la formule de Brahmagupta. *On admettra que le quadrilatère $ABCD$ est non croisé.*

Déterminons l'aire, S, de $ABCD$.

Puisque $ABCD$ est inscrit dans Γ et qu'il est non croisé nous pouvons utiliser la formule de l'énoncé :

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Or en utilisant les symétries remarquées à la question précédente, nous obtenons $p = AB + BC$ et

$$\begin{aligned} p - a &= AB + BC - AB = BC \\ p - b &= AB + BC - BC = AB \\ p - c &= AB + BC - AB = BC \\ p - d &= AB + BC - BC = AB \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{BC \times AB \times BC \times AB} \\ &= \sqrt{AB^2 \times BC^2} \end{aligned}$$

Puisqu'il s'agit de longueurs ce sont des nombres positifs donc

$$S = AB \times BC$$

$$\boxed{S = AB \cdot BC.}$$

(d) Retrouver l'expression précédente de l'aire du quadrilatère $ABCD$ par une autre méthode.

Déterminons l'aire S' de $ABCD$.

Γ est circonscrit à ABC et $[AC]$ en est un diamètre donc ABC est rectangle en B. Doc l'aire de ce triangle est

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2} AB \times BC$$

Par symétrie nous avons de même

$$\mathscr{A}(ACD) = \frac{1}{2} AB \times BC.$$

Finalement nous en déduisons l'aire de $ABCD$.

$$\boxed{S' = AB \cdot BC.}$$

Étude d'une autre configuration particulière : le rectangle.

2. (a) Justifier qu'un rectangle est inscriptible dans un cercle.

Les diagonales d'un rectangle sont de même longueur et se coupent en leur milieu. Donc tout rectangle est inscrit dans le cercle de centre le centre du rectangle et dont le rayon a pour longueur la moitié d'une diagonale.

Un rectangle est inscriptible dans un cercle.

(b) À l'aide de la formule de Brahmagupta, retrouver l'expression usuelle de l'aire d'un rectangle de longueur et de largeur.

Déterminons l'aire du rectangle.

D'après la question précédente les rectangles sont inscrits dans un cercle et, de plus, ne sont pas croisés, nous pouvons donc utiliser la formule de Brahmagupta.

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Or $p = a + b$, $a = c$ et $b = d$ donc

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{(a+b-a)(a+b-b)(a+b-a)(a+b-b)} \\ &= \sqrt{b^2a^2} \end{aligned}$$

Puisque $a \geq 0$ et $b \geq 0$ (car ce sont des longueurs)

$$S = ab$$

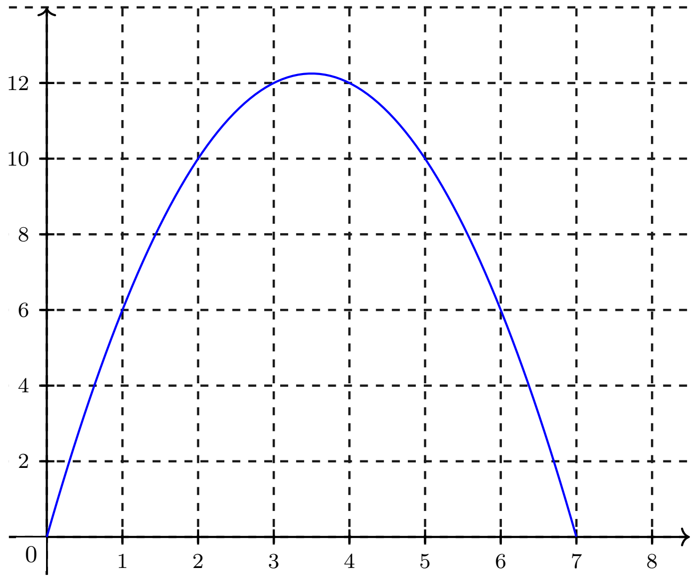
En notant $a = l$ la larguer et $b = L$ la longueur nous retrouvons bien que

l'aire d'un rectangle est $l \times L$.

Partie C : à l'ère du tableur.

On s'intéresse à l'aire des rectangles dont **le périmètre est** 14 cm.

On note x la mesure en cm d'un des côtés d'un tel rectangle. La fonction A qui à x associe l'aire $A(x)$ en cm^2 du rectangle est représentée ci-dessous.



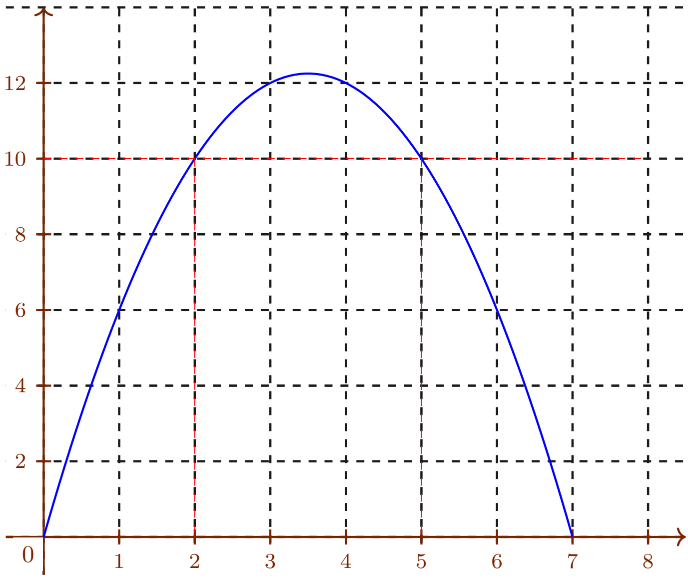
1. Pourquoi se limite-t-on à des valeurs de x comprises entre 0 et 7 ?

   x désignant une longueur, c'est un nombre positif : $x \geq 0$.
   Notons y la longueur de l'autre côté du rectangle. Nous avons alors : $2(x+y) = 14$ et donc $x + y \leq 7$. Puisque $y \geq 0$, nécessairement : $x \leq 7$.

   $$\boxed{x \in [0; 7].}$$

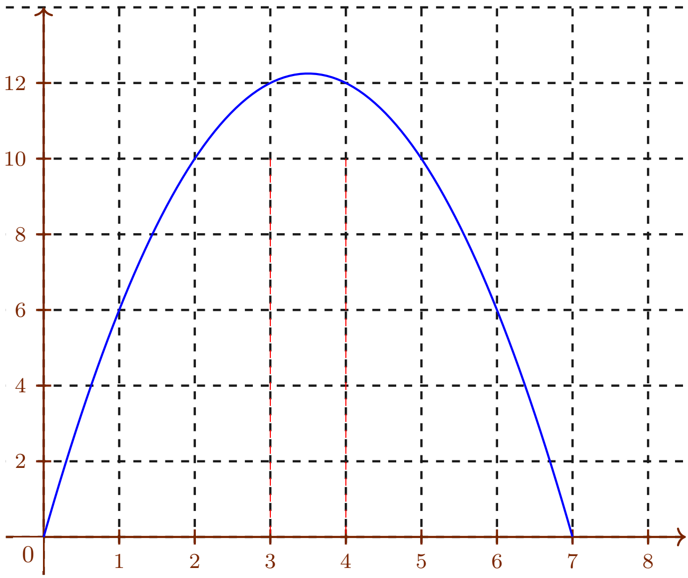
2. **Étude graphique.**
   Répondre aux questions suivantes, par lecture de la représentation graphique de la fonction A.

   (a) Quelles sont les dimensions d'un rectangle de périmètre 14 cm et d'aire 10 cm^2 ?



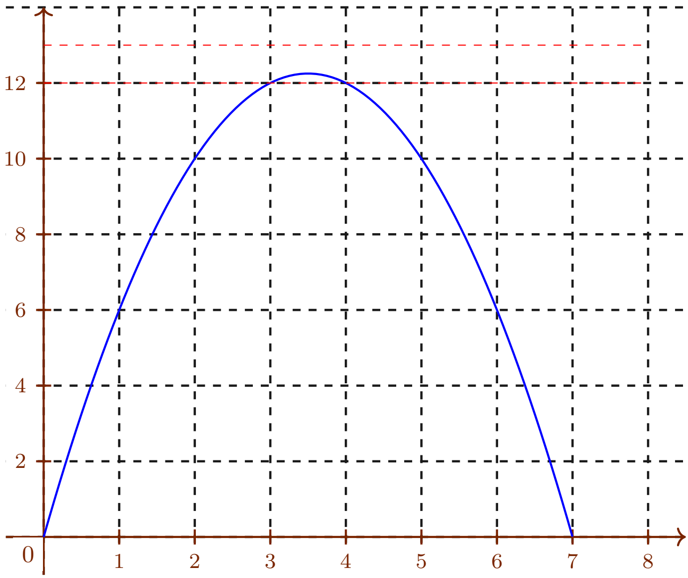
Les dimensions d'un rectangle de périmètre 14 cm et d'aire 10 cm^2 sont 2 et 5 cm.

(b) Encadrer par deux nombres entiers consécutifs la valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle semble maximale.



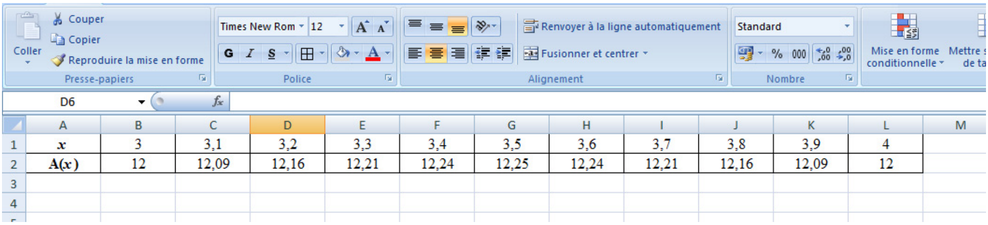
L'aire semble maximale pour : $3 \leq x \leq 4$.

(c) Encadrer par deux nombres entiers consécutifs la valeur de l'aire maximale du rectangle.



L'aire maximale $\mathcal{A}$ vérifie l'encadrement : $12 \leq \mathcal{A} \leq 13$.

Poursuite de l'étude à l'aide d'un tableur.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	x	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4	
2	A(x)	12	12,09	12,16	12,21	12,24	12,25	12,24	12,21	12,16	12,09	12	
3													
4													

3. (a) Proposer une formule qui, entrée dans la cellule B2 et recopiée vers la droite, a permis d'obtenir les valeurs de $A(x)$ sur la ligne 2.

=B2*(12-B2)

(b) À partir du tableau ci-dessus, améliorer l'encadrement de la valeur de x obtenu par lecture graphique à la question 2. b). Donner alors une estimation de la valeur de l'aire maximale.

Nous lisons :

L'aire maximale est obtenue lorsque $3{,}4 \leq \leq 3{,}6$ et alors $\mathcal{A} \approx 12{,}25$.

4. **Détermination des valeurs exactes.**

(a) Justifier que pour tout x de l'intervalle $[0;7]$, on a

$$A(x) = \frac{49}{4} - \left(x - \frac{7}{2}\right).$$

Déterminons $A(x)$.

Comme nous l'avions remarqué : $x + y = 7$, et donc $y = 7 - x$. Par conséquent l'aire du rectangle est

$$A(x) = x(7 - x).$$

Démontrons maintenant que la formule proposée est bien celle de $A(x)$.
Soit $x \in [0\ ;\ 7]$.
On peut développer avec une identité remarquable.

$$\begin{aligned}
\frac{49}{4} - \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 &= \frac{49}{4} - \left(x^2 - 7x + \frac{7^2}{2^2}\right) \\
&= -x^2 + 7x \\
&= x(7 - x) \\
&= \mathcal{A}(x)
\end{aligned}$$

Donc

$$\forall x \in [0;\ 7],\ \mathcal{A}(x) = \frac{49}{4} - \left(x - \frac{7}{2}\right)^2.$$

(b) Pour quelle valeur de x l'aire $A(x)$ est-elle maximale ? Justifier.
Quelle est la valeur maximale de $A(x)$?

Nous avons établi la forme canonique de la fonction polynomiale de degré deux , A, donc

le maximum de A est $\frac{49}{4}$ et il est atteint pour $x = \frac{7}{2}$.

(c) Que peut-on dire du rectangle de périmètre 14 cm et d'aire maximale ?

Le rectangle d'aire maximale et de périmètre 14 cm est un carré de côté $\frac{7}{2}$.

II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

Le cross du collège a eu lieu. 200 élèves de troisième ont franchi la ligne d'arrivée. Voici les indicateurs des performances réalisées en minutes.

Minimum	Premier quartile	Médiane	Troisième quartile	Moyenne	Étendue
12,5	14,8	15,7	16,3	15,4	4,2

Répondre aux questions suivantes en justifiant.

1. Quelle est la performance en minutes du dernier arrivé ?

La performance du dernier arrivé est $12{,}5 + 4{,}2 = 16{,}7$ minutes.

2. Quelle est la somme des 200 performances en minutes ?

La somme des 200 performances en minutes est $200 \times 15{,}4 = 610$ minutes.

3. Ariane est arrivée treizième. Donner l'encadrement le plus précis possible de sa performance en minutes.

La treizième position se situe avant l'effectif correspondant au premier quartile, qui est la position $\frac{200}{4} = 50$. Donc le temps mis par Ariane, T_A vérifie

$$12{,}5 \leq Temps_A \leq 14{,}8.$$

4. L'affirmation suivante est-elle vraie ?
   Affirmation : Plus de 50 % des élèves ont mis un temps supérieur au temps moyen.

   L'affirmation est vraie car la médiane, 15,7, est supérieure à la moyenne, 15,4.

   L'affirmation est vraie.

Exercice 2

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.

Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point. Une réponse fausse n'enlève pas de point.

1. **Affirmation 1** : La somme de cinq nombres entiers consécutifs est un multiple de 5.

   Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) &= 5n + 10 \\ &= 5(n+2) \end{aligned}$$

   L'affirmation 1 est vraie.

2. **Affirmation 2** : La somme des angles d'un pentagone convexe est égale à 540 °.

   On peut inscrire le pentagone régulier dans un cercle de centre O. Dans les triangles isocèles en O ainsi formés la somme des angles à la base égale $180 - \frac{360}{5} = 108°$.
   En sommant tous ces angles à la base on obtient : $5 \times 108 = 540°$.

   L'affirmation 2 est vraie.

3. On dispose du plan d'une maison à l'échelle 1/50.
   Affirmation 3 : Les aires sur le plan sont 50 fois plus petites que les aires réelles.

   Considérons par exemple un carré d'aire 1. Son aire sera $\left(\frac{1}{50}\right)^2 = \frac{1}{2\,500}$.

   L'affirmation 3 est fausse.

4. Shéhérazade commence à lire un conte un lundi soir. Elle lit 1 001 nuits consécutives.
   Affirmation 4 : Elle terminera un dimanche soir.

   $1001 = 143 \times 7$.
   Elle lira donc sa dernière histoire un dimanche soir.

   L'affirmation 4 est vraie.

Exercice 3.

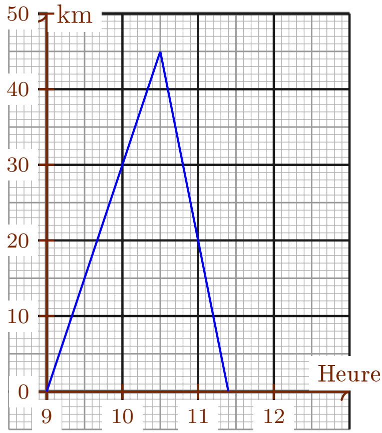
Pour s'entraîner, un cycliste effectue un parcours aller-retour entre deux villes A et B distantes de 45 km. Il part de la ville A à 9 h 30 et on considère qu'à l'aller, il roule à une vitesse constante de 30 km/h. Après un repos d'une heure, il repart de la ville B et cette fois-ci rejoint la ville A à la vitesse constante de 50 km/h.

1. À quelle heure arrive-t-il à la ville B ?

   Puisqu'il roule à 30km.h^{-1} il parcourra 45 km en $\frac{45}{30} = 1{,}5$ h.

   Il arrivera à B à 11 heure.

2. Représenter graphiquement la distance entre le cycliste et la ville A sur l'intégralité du parcours. On placera en abscisse l'heure de la journée et en ordonnée la distance entre le cycliste et la ville A exprimée en km.



3. À quelle heure est-il de retour à la ville A ? Donner le résultat en heures et minutes.

   Déterminons l'heure de son retour.

   Pour faire 45 km à 50km.h^{-1} il met : $\frac{45}{50} = 0{,}9$ h.
   Donc le trajet aller-retour prend $1{,}5 + 0{,}9 = 2{,}4$ h $= 2$ h $+ \frac{4}{10} \times 60$ mn.
   Autrement dit

   le trajet dure 2 heures et 24 minutes.

Exercice 4.

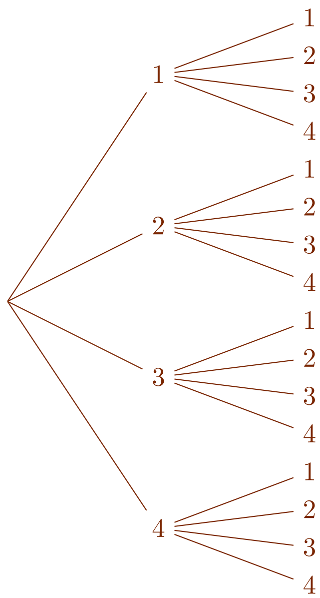
On considère un dé à quatre faces en forme de tétraèdre régulier. Ses quatre faces sont numérotées de 1 à 4. Le résultat d'un lancer est le nombre indiqué sur la face sur laquelle repose le dé.

Le dé est supposé équilibré.

1. On a lancé le dé six fois et obtenu la série de résultats : 1 ; 2 ; 4 ; 1 ; 1 ; 2.
   Au 7ᵉ lancer, la probabilité d'obtenir le nombre 1 et celle d'obtenir le nombre 3 sont-elles différentes ?

   Les expériences sont indépendantes les probabilités ne sont donc pas modifiées.

2. On lance le dé deux fois de suite.



(a) Quelle est la probabilité d'obtenir une seule fois le nombre 1 lors de ces deux lancers ?

Cette expérience peut être assimilée à un tirage avec remise. Il y a 2×3 issues qui réalisent cet événement parmi les $4 \times 4 = 16$ issues toutes équiprobables possibles. Donc la probabilité d'obtenir une seule fois le nombre 1 est de $\frac{6}{16}$.

$$\boxed{P(1) = \frac{3}{8}.}$$

(b) Quelle est la probabilité que le nombre obtenu au deuxième lancer soit strictement supérieur au nombre obtenu au premier lancer ?

Notons A : « le nombre obtenu au deuxième lancer est strictement supérieur au nombre obtenu au premier lancer ».
$A = \{(1;2), (1;3), (1;4), (2;3), (2;4), (3;4)\}$.
Il y a équiprobabilité, A est réalisé par 6 issues et l'univers comporte 16 issues donc

$$P(A) = \frac{6}{16}.$$

$$P(A) = \frac{3}{8}.$$