CRPE sujet 3 session 2014 exceptionnelle.

Exercice 1.

1.

$$\begin{aligned}
4^7 \times 5^{18} &= (2^2)^7 \times 5^{18} \\
&= 2^{14} \times 5^{14} \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \\
&= 5 \times 5 \times 25 \times 10^{14} \\
&= 5 \times 125 \times 10^{14} \\
&= 625.10^{14}
\end{aligned}$$

On peut donc affirmer que l'écriture décimale de $4^7 \times 5^{18}$ comporte 17 chiffres.

2. L'affirmation est fausse. Montrons le en raisonnant par l'absurde en supposant l'affirmation exacte ; on suppose qu'il y a 6 chaussettes.

   Elles sont toutes rouges sauf deux : il y a donc 4 chaussettes rouges et 2 d'une autre couleur. Or elles sont toutes vertes sauf 2 ce qui contredit la phrase précédente.

   On a donc démontré par l'absurde que l'affirmation est fusse.

   En fait il y a 3 chaussettes dans le tiroir. Une de chaque couleur.

3. Notons n le nombre de billes noires. On suppose que le terme indiscernable implique une loi d'équiprobabilité. La probabilité de tirer une boule noire fourni l'équation :

$$\frac{n}{11+n} = 0,3125$$

   qui est successivement équivalente à

$$\begin{aligned}
n &= 0,3125 \times (11+n) \\
n(1-03125) &= 0,3125 \times 11 \\
n &= \frac{0,3125 \times 11}{1-0,3125} \\
n &= 5
\end{aligned}$$

   L'affirmation est fausse il y a exactement 5 billes dans le sac.

4. Le prix du mélange est

$$2 \times \frac{45}{100} + 1,8 \times \frac{55}{100} = 1,89$$

   L'affirmation est donc fausse.

5. Notons x le temps écoulé en heures depuis midi. La distance parcourue par le cycliste à l'instant x est : $15(5+x)$; et celle parcourue par l'automobiliste est : $90x$. L'automobiliste rattrapera le cycliste lorsque : $15(5+x) = 90x$. Équation du premier degré dont la solution est : $x = 1$. Donc la jonction aura lieu une heure après midi, c'est–dire à 13 h 00. L'affirmation de l'énoncé est donc fausse.
6. Les arêtes sont les hypoténuses de triangles isocèles rectangles en O dont les côtés de l'angle isocèle sont des rayons de la sphère. Le théorème de Pythagore permet d'affirmer que toutes ces arêtes ont la même longueur.

Exercice 2.

1. (a) La décomposition de 28 en facteurs premiers est : $28 = 2^2.7$. On en déduit la liste des diviseurs de 28 : $\{1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 14,\ 28\ \}$. La somme de ces diviseurs est : $1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56 = 2 \times 28$.

   (b) $12 = 2^2.4$. Notons $D(n)$ l'ensemble des diviseurs de n. $D(12) = \{1,\ 2,\ 4,\ 3,\ 6,\ 12\}$. Donc : $f(12) = 1+2+4+3+6+12 = 28 > 2\times 12$. 12 est abondant.
2. 1 est le plus petit nombre déficient :

$$\begin{aligned} D(1) &= \{1\} \\ f(1) &= 1 < 2 \times 1 \end{aligned}$$

   2, 3, 4 et 5 sont également des nombres déficients :

$$\begin{aligned} D(2) &= \{1,\ 2\} \\ f(2) &= 3 < 2 \times 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(3) &= \{1,\ 3\} \\ f(3) &= 4 < 2 \times 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(4) &= \{1,\ 2,\ 4\} \\ f(4) &= 7 < 2 \times 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(5) &= \{1,\ 5\} \\ f(5) &= 6 < 2 \times 5 \end{aligned}$$

   6 est le plus petit nombre parfait :

$$\begin{aligned} D(6) &= \{1,\ 2,\ 3,\ 6\} \\ f(6) &= 12 = 2 \times 6 \end{aligned}$$

7 comme tous les nombres premiers est déficients (question suivante).
8, 9 et 10 sont déficients :

$$\begin{array}{rcl} D(8) & = & \{1,\ 2,\ 4,\ 8\} \\ f(8) & = & 15 < 2 \times 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} D(9) & = & \{1,\ 3,\ 9\} \\ f(9) & = & 13 < 2 \times 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} D(10) & = & \{1,\ 2,\ 5,\ 10\} \\ f(10) & = & 18 < 2 \times 10 \end{array}$$

11 est déficient puisque premier.
Ainsi d'après la question précédente le plus petit nombre abondant est 12.

3. Soit $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier. $D(p) = \{1,\ p\}$. Donc $f(p) = 1 + p$. Comparons $f(p)$ et $2p$:

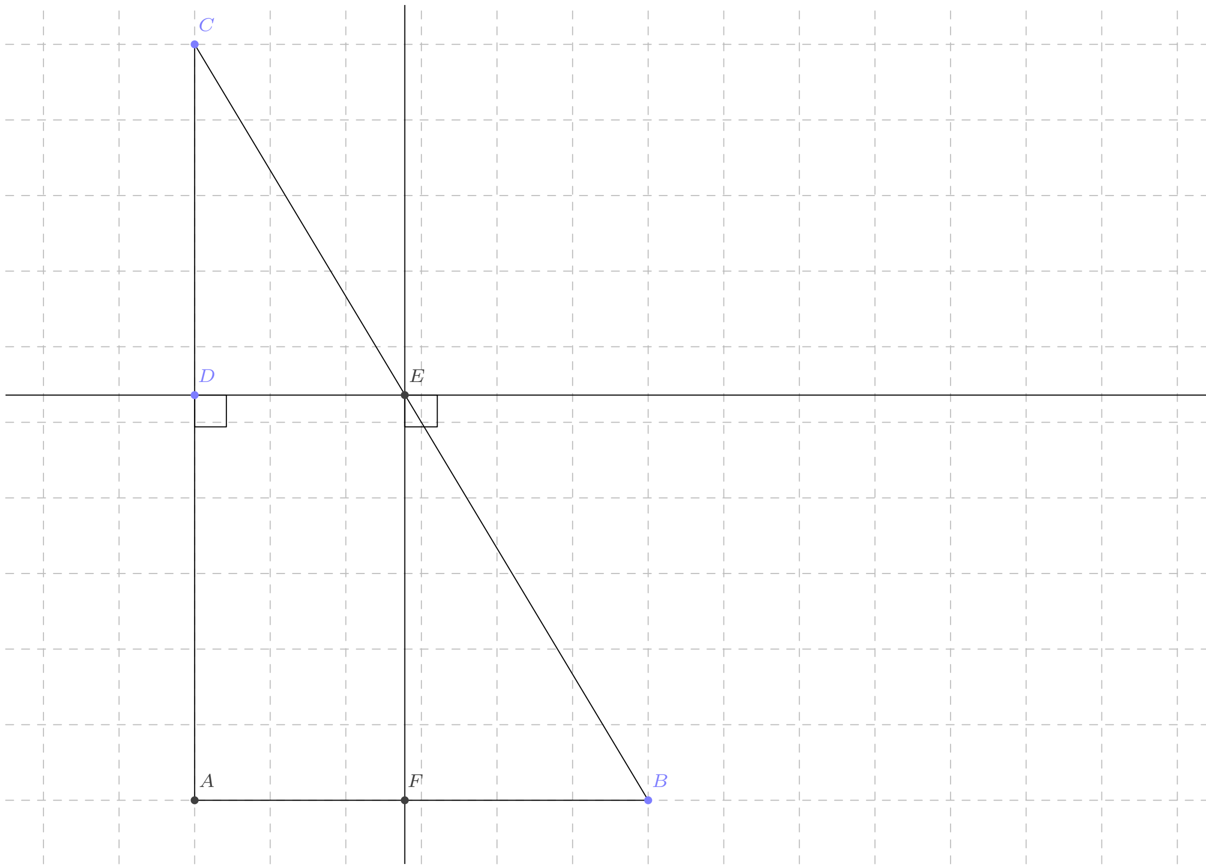
$$\begin{array}{rcl} f(p) - 2p & = & 1 + p - 2p \\ & = & 1 - p \\ < 0 & & \end{array}$$

Ainsi les nombres premiers sont déficients.

Exercice 3

- **Partie 1**

1. Cliquez ici pour avoir le fichier géogéra.



2. $DEFA$ est par construction un rectangle pour que ce soit de plus un carré il faut et il suffit qu'il ait deux côtés consécutifs de même longueur. Raisonnons par conditions nécessaires et suffisantes en supposant : $DA = AF$.

   Notons $x = DC$. Donc : $DA = 10 - x$. D'autre part : $AF = DE$.

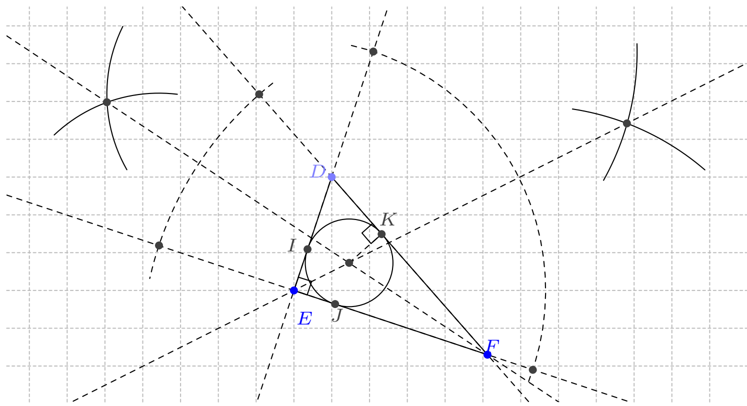
   Déterminons DE en fonction de x.
   (DA) et (EB) sont sécantes en C. Les points C, D, A d'une part et C, E, B d'autre part sont alignés dans cet ordre. Comme de plus $(DE)//(AB)$, d'après le théorème de Thalès : $\frac{x}{10} = \frac{DE}{6}$.
   On en déduit : $DE = \frac{6}{10}x$.

   Si $DA = AF$, alors $10 - x = \frac{6}{10}x$. On résout cette équation du premier degré en : $x = \frac{25}{4}$.

   Réciproquement supposons que $x = \frac{25}{4}$.
   Alors $AD = \frac{15}{4}$. Et d'après le théorème de Thalès : $DE = \frac{6}{10} \times \frac{25}{4} = \frac{15}{4}$.
   Le rectangle $DEFA$ est donc un carré.

- **Partie 2.**

1. fichier géogébra.



2. Notons P le centre d cercle inscrit dans le triangle. Le périmètre peut s'exprimer comme la somme : $IE + EJ + JF + FK + KD + DI$.

   $IPJE$ est un carré de côtés 2. Donc : $IE = EJ = 2$.

   Par construction $IPKD$ est un cerf-volant donc $ID = DK$.
   De même $JF = FK$. On en déduit : $ID + JK = DK + FK = 13$.
   Finalement le périmètre est donc : $IE + EJ + JF + FK + KD + DI = 2 \times 13 + 2 \times 2 = 30$.

   Le périmètre de DEF est 30 cm.