Exercice 1.

1. On peut représenter cette expérience aléatoire par un tableau :

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

   On voit que l'événement « le résultat est pair »est réalisé par $1 = +3 + 5 + 5 + 3 + 1 = 18$ 2-listes. Or il y au total 36 2-listes qui sont toutes équiprobables donc l'événement « l'issue est un nombre pair »est obtenu avec une probabilité de $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. L'événement contraire, à savoir « obtenir une issue impaire », à donc une probabilité de $1 - \frac{1}{2}$.
   L'affirmation 1 est vraie.

2. En considérant des angles supplémentaires : $\widehat{EBA} = 180 - 120 = 60°$. Puisque la somme des mesures des angles du triangle vaut 180° : $\widehat{BAE} = 180 - 25 - 60 = 95°$. Le triangle ABE n'est donc pas rectangle en A.
   L'affirmation 2 est fausse.

3. $125 \text{ L} = 125 \text{ dm}^3 = 0,125 \text{ m}^3$.
   $2 \text{ min } 30 \text{ s} = 2 \times 60 + 30 \text{ s} = 150 \text{ s} = \frac{150}{3\ 600}$ h.
   Le débit du robinet est donc en mètres cubes par heure de : $\frac{0,125}{\frac{150}{3\ 600}} = 0,125 \times \frac{3\ 600}{150} = 3 \text{ m}^3.\text{h}^{-1}$.
   L'affirmation 4 est vraie.

4. Supposons qu'il existe un multiple de 81 qui ne s'écrit qu'avec des 9 : $\exists n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{Z},\ 81p = \sum_{k=0}^{n} 9.10^k$. Donc : $9p = \sum_{k=0}^{n} 10^k$. En particulier $\sum_{k=0}^{n} 10^k$ est divisible par neuf ; autrement dit la somme de ses chiffres l'est ; donc n est un multiple de 9.
   Choisissons (par exemple) $r = 999\ 999\ 999$. $r = 12345679 \times 81$.
   L'affirmation 4 est vraie.

Exercice 2.

1. (a) 3-10-5-16-8-4-2-1-4-2
   (b) 5-16-8-4-2-1-4-2-1-4
   (c) 6-3-10-5-16-8-4-2-1-4
   (d) Il semble qu'à partir d'un certain rang la suite devienne 3-périodique de période 4-2-1.
2. (a) 20 et 3.
   (b) Étant donné le deuxième terme d'une suite de Syracuse, l'algorithme définissant la suite ne prévoit que 2 façons d'obtenir ce deuxième terme. Ce deuxième terme n'a donc au maximum que deux prédécesseurs.

3. Soit $p \in \mathbb{N}$ un nombre impair : $\exists n \in \mathbb{N},\ p = 2n+1$. Le terme suivant p est donc : $3(2n+1)+1 = 6n+3+1 = 2(3n+2)$; qui est donc pair.
   Dans une suite de Syracuse un nombre impair ne peut pas être suivi d'un nombre pair.

<u>*Exercice*</u> *3.*

1. Raisonnons par l'absurde. Supposons que $OC \neq OF$.

   Puisque $CDEF$ est un rectangle, d'une part $CD = EF$ et d'autre part d'après le théorème de Pythagore on a :

   $$OD^2 = CD^2 + CO^2$$

   $$OF^2 = EF^2 + OE^2$$

   On en déduit que $OD \neq OE$, ce qui contredit le fait $[OD]$ et $[OE]$ sont des rayons d'un même cercle.

   On a donc démontré par l'absurde que, nécessairement, $CO = OF$.
2. La plus petite valeur de OC est 0 et la plus grande est 5 lorsque $[OC]$ exhausse $[OA]$.
3. Calculons CD.
   Par construction CDO est rectangle en C, donc, d'après le théorème de Pythagore, $CD^2 = OD^2 - CO^2 = 5^2 - 3^2 = 16$. Et comme CD est positive (puisque c'est une longueur) on en déduit : $CD = 4$.
   L'aire de $CDEF$ est donc : $\mathcal{A}(CDEF) = CD \times 2.OC = 4 \times 6 = 24$ cm^2, et son périmètres est : $\mathcal{P}(CDEF) = 2(CD + 2.OC) = 2(4 + 2 \times 3)$ cm.
4. (a) En reprenant le raisonnement précédent : $CD^2 = 5^2 - CD^2 = 25 - x^2$. Comme CD est une longueur c'est une quantité positive et donc : $CD = \sqrt{25 - x^2}$.

   (b) L'aire de $CDEF$ est : $\mathcal{A}(CDEF)(x) = CD \times 2.OC = 2x\sqrt{25 - x^2}$ cm^2, et son périmètres est : $\mathcal{P}(CDEF)(x) = 2(CD + 2.OC) = 2(\sqrt{25 - x^2} + 2x)$ cm.

   (c) Raisonnons par conditions nécessaires et suffisantes.

   Dire que $CDEF$ est une carré c'est dire que deux côtés consécutifs ont la même longueur :

   $$\begin{aligned} \sqrt{25 - x^2} = x \quad & \Rightarrow \quad 25 - x^2 = x^2 \\ & \Rightarrow \quad x = \frac{5}{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

   Réciproquement si $x = \frac{5}{2}\sqrt{2} \in [0\ ;\ 5]$ alors :

   $$\begin{aligned} \sqrt{25 - x^2} &= \frac{5}{2}\sqrt{2} \\ x = \frac{5}{2}\sqrt{2} & \end{aligned}$$

Ainsi il existe une unique valeur de x pour laquelle $CDEF$ est un carré.

L'aire de ce carré est alors $\frac{25}{2}$ et son périmètre est $10\sqrt{2}$.

5. (a) Si $x = 0$ le rectangle est aplati et son aire est nulle. La courbe $\mathcal{C}_1$ représente l'aire du rectangle.
   (b) Il est clair, d'après le graphique, qu'au voisinage de $x = 4$ l'aire est une fonction strictement décroissante de x tandis que le périmètre est une fonction strictement croissante de x.
   Donc l'aire du rectangle n'augmente pas lorsque son périmètre augmente.
6. `= 2*RACINE(25-A2^2)+4*A2`
7. `= 2*A2*RACINE(25-A2^2)`
8. On en déduit l'encadrement : $4,4 \leq x_1 \leq 4,5$.