Exercice 1.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq 100$, l'âge de l'homme. 11 est un diviseur de $n-1$ donc : $n \in \{1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 100\}$. Et $n+1$ est divisible par 5 donc n est congru à 4 modulo 5. Parmi les éléments de l'ensemble précédents les seuls qui soient congru à 4 modulo 5 sont : 34 e 89. L'homme peut donc avoir 34 ou 89 ans.
   L'affirmation est fausse.

2. Notons S_i et H_i les événements respectivement :« temps sec le jour i »et « temps humide le jour i ». Les événements H_1 et S_1 constituent un système d'événement complet. On en déduit la probabilité que le temps soit humide après demain : $P(H_2) = P(H_1) \times P_{H_1}(H_2) + P(S_1) \times P_{S_1}(H_2) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
   L'affirmation 2 est fausse.

3. 150m $= 0,15$km et 8s $= \frac{8}{3\ 600}$h. La vitesse moyenne est donc : $\frac{0,15}{\frac{8}{3\ 600}} = \frac{0,15 \times 3\ 600}{8} = 94,5$km/h.
   L'affirmation 3 est vraie.

4. Étant donnés deux nombres entiers impairs il existe $(n, m) \in \mathbb{R}^2$ tels que ces nombres puissent s'écrire : $2n+1$ et $2m+1$. On a :

$$\begin{array}{rcl} (2n+1)^2 + (2m+1)^2 & = & 4n^2 + 4n + 1 + 4m^2 + 4m + 1 \\ & = & 2(2n^2 + 2n + 2m^2 + m + 1) \end{array}$$

   Il s'agit bien d'un nombre pair.
   L'affirmation 4 est vraie.

5. 5 et 3 sont des nombres premiers et pourtant leur somme, 8, n'est pas premier.
   L'affirmation 5 est fausse.
   2 et 3 sont des nombres premiers et leur somme, 5, est aussi un nombre premier.
   L'affirmation 6 est fausse.

Exercice 2.

1. Dans une bouteille de 0,5 litre de boisson A il y a $0,5 \times \frac{10}{100} = 0,05$ L de jus d'orange. Dans une bouteille de 1,25 L de boisson B il y a $1,25 \times \frac{5}{100} = 0,0625$ L de jus d'orange.
   La bouteille de B contient la plus grande quantité de jus d'orange.

2. 20 cL de A contient $20\frac{10}{100} = 2$ cL de jus d'orange. 30 cL de B contient $30 \times \frac{5}{100} = 1,5$ cL. Le mélange contient donc $2 + 1,5 = 3,5$ cL de jus d'orange pour quantité totale de $20 + 30 = 50$ cL. Le pourcentage de jus d'orange dans le mélange est donc : $\frac{3,5}{50} \times 100 = 7\%$.

3. Notons x et y les quantités de A et B mélangées ($x, y \in [0, 40]$). On doit avoir :

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 40 \\ \frac{\frac{10}{100}x + \frac{5}{100}y}{x+y} \times 100 = 8 \end{array} \right.$$

En résolvant ce système d'équations linéaires à deux inconnues par substitution on obtient :

$$\begin{aligned}
x &= 40 - y \\
\text{donc } \frac{\frac{10}{100}(40-y) + \frac{5}{100}y}{40-y+y} \times 100 &= 8 \\
\left(4 - \frac{5}{100}y\right)\frac{10}{4} &= 8 \\
-\frac{5}{100}y &= 8 \times \frac{4}{10} - 4 \\
y &= -\frac{100}{5} \times \frac{-8}{10} \\
y &= 16 \\
\text{d'où : } 8x &= 40 - 8 \\
x &= 32
\end{aligned}$$

Le mélange souhaité est obtenu lorsqu'on mélange 32 cL de A et 8 cL de B.

4. Le nombre obtenu dans la cellule C14 est la proportion de jus d'orange du mélange obtenu en ajoutant 2 cL de A à 38 cL de B.

Exercice 3.

Partie A.

1. Puisque $ABCD$ est un rectangle et que $M \in [BC]$ et $N \in [CD]$ (car N est le symétrique par rapport à O de M) :
   — $(MB)//(CN)$
   — $(MP) \perp (PC)$
   — $(PC) \perp (CN)$
   On en déduit que $MPCN$ est un trapèze rectangle.
2. M (resp. A) est le symétrique de N (resp. C) par rapport à O. Donc : $AO = OC$ et $MO = ON$.
   D'autre part les points A, O, C et B, O, N sont alignés dans cet ordre et (AM) et (NC) sont parallèles donc, d'après le théorème de Thalès : $\frac{AM}{CN} = \frac{AO}{OC} = 1$. On en déduit que $AM = CN$.
3. On a une configuration de Thalès : les points B, P, C et D, N, C sont alignés dans cet ordre. De plus $(BD)//(NP)$, donc, d'après le théorème de Thalès : $\frac{PC}{BC} = \frac{NC}{CD}$. Autrement dit :

$$\begin{aligned}
\frac{5 - BP}{5} &= \frac{9 - DN}{9} \\
\frac{BP}{5} &= \frac{DN}{9} \\
BP &= \frac{5}{9}DN
\end{aligned}$$

   D'après la question précédente $AM = CN$ donc $BM = DN$. D'où : $BP = \frac{5}{9}BM$

Partie B.

1. (a) L'aire du trapèze rectangle $MBCN$ est :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(MBCN) &= \frac{1}{2}(MB+CN).BC\\ &= \frac{1}{2}(9-6+6)5\\ &= \frac{45}{2}\text{ cm}^2\end{aligned}$$

(b) BMP est rectangle en B donc son aire est :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(BMP) &= \frac{1}{2}.BM.BP\\ &= \frac{1}{2}.BM.\frac{5}{9}.BM\\ &= \frac{5}{18}(9-6)^2\\ &= \frac{5}{2}\text{ cm}^2\end{aligned}$$

PCN est rectangle en C donc son aire est :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(PCN) &= \frac{1}{2}.PC.CN\\ &= \frac{1}{2}(5-BP).AM\\ &= \frac{1}{2}\left(5-\frac{5}{9}.BM\right)6\\ &= \frac{1}{2}\left(5-\frac{5}{9}.(9-6)\right).6\\ &= 10\text{ cm}^2\end{aligned}$$

(c) L'aire de MNP se déduit du découpage en triangle du trapèze $MBCN$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(MNP) &= \frac{45}{2}-\frac{5}{2}-10\\ &= 10\text{ cm}^2\end{aligned}$$

2. (a) Comme dans le cas particulier :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(MBCN) &= \frac{1}{2}(MB+CN).BC\\ &= \frac{1}{2}.9.5\end{aligned}$$

$$\frac{45}{2}\text{ cm}^2$$

Donc l'aire $MBCN$ est indépendante de x.

(b)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{45}{2} - \frac{1}{2}(9-x).\frac{5}{9}(9-x) - \frac{1}{2}\left(5 - \frac{5}{9}(9-x)\right)x \\ &= \frac{45}{2} - \frac{5}{18}(81 - 18x + x^2) - \frac{5}{18}x^2 \\ &= -\frac{5}{9}x^2 + 5x \end{aligned}$$

3. (a) f est polynomiale de degré 2. Sa courbe représentative est donc l'une des paraboles *figure 1* ou *figure 3*. Comme de plus $f(3) = 10$ nécessairement la courbe représentative de f est sur la *figure 3*.

   (b) Par lecture graphique l'aire de MNP semble maximale pour $x = 4,3$ et ce maximum est alors de 11,2.

4. (a) Soit $x \in]0,9[$

$$\begin{aligned} \frac{45}{4} - \frac{5}{9}\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 &= \frac{45}{4} - \frac{5}{9}\left(x^2 - 9x + \frac{81}{4}\right) \\ &= \frac{45}{4} - \frac{5}{9}x^2 + 5x - \frac{45}{4} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

   Ainsi l'expression proposée dans l'énoncé est bien la forme canonique de f.

   (b) f est une fonction polynomiale de degré 2. Elle admet donc un extremum ; son coefficient dominant étant négatif, $-\frac{5}{9}$, cet extremum est un maximum. D'après la forme canonique trouvée à la question précédente l'aire du triangle est maximale pour $x = \frac{9}{2}$ et ce maximum est alors $\frac{45}{4}$.
   On peut retrouver ce résultat en remarquant que $\frac{45}{4}$ est un majorant de f puis que que ce majorant est un maximum puisqu'il est atteint pur $x = \frac{9}{2}$.