*Exercice* 1.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} = 2^n(1+2+2^2) = 2^n.7$.
   L'affirmation 1 est vraie.
2. Il s'agit d'un schéma de Bernoulli. L'épreuve de Bernoulli est le choix de la réponse pour chaque question. À chaque fois la probabilité de succès est $p = \frac{1}{3}$ et la probabilité de l'échec est $1-p$. On recommence dà l'identique et de façon indépendante cette épreuve.
   Notons $X$ la variable aléatoire qui compte le nombre de succès après 3 question. Elle suit une loi binomiale de paramètres $\left(3; \frac{1}{3}\right)$. Donc la probabilité que toutes les réponses soient vraies est :
   $$P(X=3) = \binom{3}{3} \times p^3(1-p)^0 = \frac{1}{27}$$
   L'affirmation 2 est vraie.
   la probabilité que toutes les réponses soient fausses est :
   $$P(X=0) = \binom{0}{3} \times p^0(1-p)^3 = \frac{2^3}{3^3}$$
   L'affirmation 3 est fausse.
3. Pour les disques. L'aire du disque central est en centimètres carrés : $\pi 5^2 = 25\pi$. L'aire grisée s'obtient comme différence des aires de deux disques : $\pi(25^2 - 20^2) = \pi(25-20)(25+20) = \pi 245$. Donc le rapport recherché est : $\frac{25}{245} = \frac{5}{45} = \frac{1}{9}$.
   Pour les carrés. L'aire du carré central est : $10^2 = 100$. L'aire grisée est la différence des aires des carrés : $50^2 - 40^2 = (50-40)(50+40) = 10.90$. Donc le rapport recherché est : $\frac{100}{10.90} = \frac{1}{9}$.
   L'affirmation 4 est vraie.

*Exercice* 2.

1. Par hypothèse $(AB)//(TU)$.

   Montrons que $(BU)//(AT)$.
   Les droites $(CM)$ et $(PB)$ sont sécantes en $R$. Les points $P, B, R$ d'une part et $C, M, R$ d'autre part sont alignés dans cet ordre. Comme de plus $PB = CM$ (par hypothèse) et $PR = CR$ (car $EPRC$ est un carré), on en déduit, d'après le théorème de Thalès que : $(BU)//(AT)$.

   On déduit de ces deux parallélisme que le quadrilatère $BATU$ est un rectangle.
2. (a) Si on exclue le cas d'un rectangle trivial (plat), comme $M \in [CR]$, $x \in [0; 40]$.

   (b) La diagonale $(PC)$ du carré est aussi une bissectrice de l'angle $\widehat{UPB}$ donc $\widehat{UPB} = 45°$. Comme de plus $PUB$ est rectangle en $U$ il est donc isocèle. Et d'après le théorème de Pythagore : $2UB^2 = x^2$. Comme $UB \geq 0$ et $x \geq 0$, $UB = \frac{x}{\sqrt{2}}$.

(c) $TU = TP - UP = 40\sqrt{2} - \frac{x}{\sqrt{2}}$.

(d) On déduit des deux questions précédentes l'aire du rectangle :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(BATU) &= \left(40\sqrt{2} - \frac{x}{\sqrt{2}}\right) \times \frac{x}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{(40-x)x}{2}\end{aligned}$$

3. L'aire du rectangle est maximale lorsque $x = 20$ et cette aire est alors de 200.

4. (a) En développan :

$$\begin{aligned}\frac{-(x-20)^2}{2} + 200 &= -\frac{1}{2}(x^2 - 40x + 400) + 200 \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + 20x - 200 + 200 \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + 20x \\ &= |\frac{1}{2}(-x^2 + 40x) \\ &= \frac{1}{2}(40 - x)x \\ &= A(x)\end{aligned}$$

(b) Du fait de la forme canonique du trinôme $A$ trouvée à la question précédente on peut affirmer que $A$ admet un maximum en 20 égal à 200.

(c) Si $BU = x = 20$, alors $TA = 40 - x = 20$. Donc $BATU$ est alors un carré.

<u>*Exercice*</u> 3.

1. (a) Le nombre d'ascendants au degré 3 est : $2^3 = 8$.

   (b) le nombre d'ascendants au degré $n \in \mathbb{N}$ est : $2^n$.

2. (a) Le numéro du descendant direct de $p$ est $\frac{p}{2}$.

   (b) Le numéro du descendant direct de $m$ est $\frac{m-1}{2}$.

   (c) Des deux questions précédentes on déduit que les deux personnes sont du même sexe si et seulement si leur numéro sont de même parité (le cas de Françoise étant exclu).

3.

$$\begin{aligned}
191-1 &= 2.95\\
95-1 &= 2.47\\
47-1 &= 2.23\\
23-1 &= 2.11\\
11-1 &= 2.5\\
5-1 &= 2.2
\end{aligned}$$

Donc la personne de numéro 191 est un ascendant du côté père.

4.

$$\begin{aligned}
257-1 &= 2.128\\
128 &= 2^7
\end{aligned}$$

Les hommes ayant un numéro pair, on peut affirmer que le chemin de l'arbre qui va de Claude à Françoise contient 7 hommes.