<u>Exercice</u> 1.

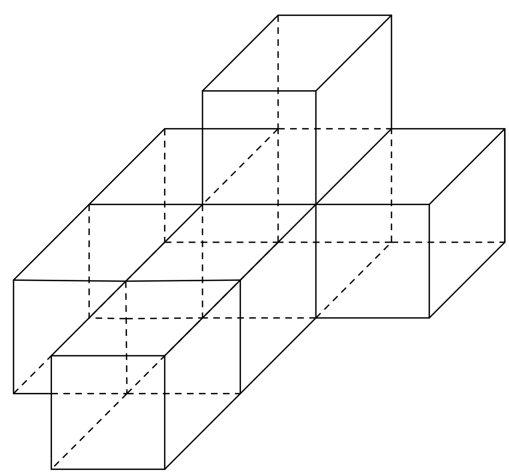
1. La question est équivalente à la suivante : peut-on construire un triangle rectangle dont les dimensions soient $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{64} = 8$ et $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$? Or ceci est possible d'après le théorème de Pythagore si et seulement si : $100 = 64 + 32$. Cette dernière égalité étant fausse on en déduit qu'un triangle ayant de telles dimensions ne peut être rectangle.
   L'affirmation 1 est fausse.

2. Soit $k \in \mathbb{Z}$ un nombre qui soit un multiple de 6 et de 9. Alors : $\exists p \in \mathbb{Z},\ k = 6.9.p$. Autrement dit : $\exists p \in \mathbb{Z},\ k = 54.p$. Ainsi k est un multiple de 54.
   L'affirmation 2 est vraie.

3. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $x+y = 400$. Si on augmente de 3 x et y alors : $(x+3)(y+3) = xy + 3(x+y) + 9 = xy + 3 \times 400 + 9 = xy + 1\ 209$.
   L'affirmation 3 est vraie.

4. Si T désigne la quantité totale d'alimentation dont dispose l'agriculteur. La quantité consommée quotidiennement par chaque vache est : $\frac{T}{8.20}$. Pour nourrir $8+2 = 10$ vaches pendant 18 jours il faudra fournir : $\frac{T}{8.20}.10.18 = T.\frac{3^2}{2^3}$. Comme $\frac{3^2}{2^3} > 1$, il y aura assez d'aliments pour chaque jour.
   L'affirmation 4 est vraie.

5. Si on le dessine en perspective cavalière :



   On compte sur la figure 8 cubes élémentaires.
   L'affirmation 5 est vraie.

6.

$$\begin{aligned}
(8\times 7)+3\times 5 &= 71\\
(8\times 7+3)\times 5 &= 295\\
8\times(7+3)\times 5 &= 400\\
8\times(7+3\times 5) &= 176
\end{aligned}$$

L'affirmation 6 est fausse.

<u>*Exercice*</u> 2.

Partie A

1. Déterminons DE en fonction de x.
   (DA) et (EC) sont sécantes en B. Les points C, E, B d'une part et A, D, B d'autre part sont alignés dans cet ordre.$(DE)//(AC)$ car $ADEF$ est un rectangle.
   On en déduit, d'après la théorème de Thalès :

   $$\begin{aligned}
   \frac{DE}{AC} &= \frac{BD}{AB}\\
   \frac{DE}{1} &= \frac{1-x}{1}\\
   DE &= 1-x
   \end{aligned}$$

   L'aire du rectangle $AFED$ est :

   $$\begin{aligned}
   \mathcal{A}(AFED) &= AD\times DE\\
   \mathcal{A}(AFED) &= x\times(1-x)\\
   \mathcal{A}(AFED) &= -x^2+x
   \end{aligned}$$

   Autrement dit : $\forall x \in [0;1],\ f(x) = -x^2 + x$
2. (a) Formule entrée en $B2$: $= -A2 \wedge 2 + A2$
   (b) Le tableau permet uniquement d'affirmer que le maximum est atteint pour un nombre compris entre 0,4 et 0,6.
3. (a) Soit $x \in [0;1]$.
   En développant :

   $$\begin{aligned}
   -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4} &= -x^2+2\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\\
   &= -x^2+x\\
   &= f(x)
   \end{aligned}$$

   (b) f est une fonction polynomiale de degré 2 dont la question précédente nous donne la forme canonique on peut donc affirmer que f admet un maximum égal à $\frac{1}{4}$ qui est atteint en $\frac{1}{2}$.

(c) Si $x = \frac{1}{2}$ alors $1 - x = \frac{1}{2}$ donc l'aire est maximale lorsque le quadrilatère $ADEF$ est un carré.

Partie B

1. Puisque ABC est rectangle en A et que $AB = AC = 1$, d'après le théorème de Pythagore : $BC = \sqrt{2}$. Notons M le milieu de $[BC]$. Si $G \in [MC]$, alors $DEFG$ n'est plus un rectangle pas même un quadrilatère convexe. Donc, nécessairement $G \in [BM]$.
$\left\{ \begin{array}{l} G \in [BM] \\ BM = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right. \Rightarrow x \in \left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
Ainsi : $I = \left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.
2. ABC est isocèle rectangle en A donc $\widehat{GBD} = 45°$.
3. (a) Par lecture graphique le rectangle mesure $0,2m^2$ lorsque $x = 0,2$ ou $x \simeq 0,52$.
   (b) D'après le graphique g admet un maximum égal à 0,25 atteint en $x = 0,35$.
   (c) Si $x = 0,35$, alors $DG = x$ et $GF = sqrt2 - 2 \times 0,35 \simeq 0,714$. Le quadrilatère n'est dans ce cas pas un carré.

<u>*Exercice*</u> 3.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} A_n &= \underbrace{111\ldots1}_{=n\text{fois}} \\ &= \sum_{k=0}^{n} 10^k \\ &= 11 \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} 10^k + \epsilon(n) \end{aligned}$$

où $\epsilon(n) = 10^n$ si n est impair 0 sinon.
Distinguons deux cas. Si n est pair alors clairement A_n est divisible par 11. Si n est impair alors : $\exists (p,h) \in \mathbb{N}^2,\ A_n = 11p + 10^{2h+1}$. Raisonnons par l'absurde ; supposons que A_n soit divisible par 11. Dans ce cas $11p$ étant divisible par 11 nécessairement 10^n l'est aussi. Or ceci est absurde puisque les facteurs premiers de 10 sont 2 et 5 tandis que 11 est premier. Les réciproques sont immédiates et l'on conclut : A_n est divisible par 11 si et seulement si n est paire.
2. Si A_n est divisible par 33 alors il est en particulier divisible par 11. Donc nécessairement n est paire. Comme de plus il est divisible par 3 la somme de ses chiffres doit être divisible par 3 ; autrement dit n est divisible par 3. Ainsi est un multiple de 6. La réciproque est immédiate et l'on conclut : A_n est divisible par 33 si et seulement si n est un multiple de 6.