CRPE épreuve de mathématique 2012 groupe 3.

I Exercice 1 (5 points).

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 6{,}5$ et $AD = 4$, l'unité de mesure étant le centimètre.

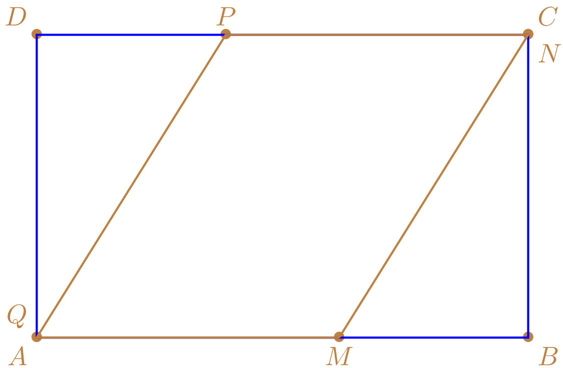
M, N, P et Q sont des points respectivement sur les segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$, et tels que $AM = BN = CP = DQ$.

On s'intéresse dans cet exercice à la variation de l'aire du quadrilatère $MNPQ$ en fonction de la position du point M.

Toute réponse devra être justifiée.

On pose $AM = x$.

1. Construire la figure dans le cas $x = 4$. Démontrer que $MNPQ$ est un parallélogramme. Calculer son aire.



Si $x = 4$ alors $MNPQ$ se confond avec $AMCP$.

Or $\begin{cases} (AM) \\ (CP)\text{, car } ABCD \text{ parallélogramme} \\ AM = CP = x\text{, par construction} \end{cases}$

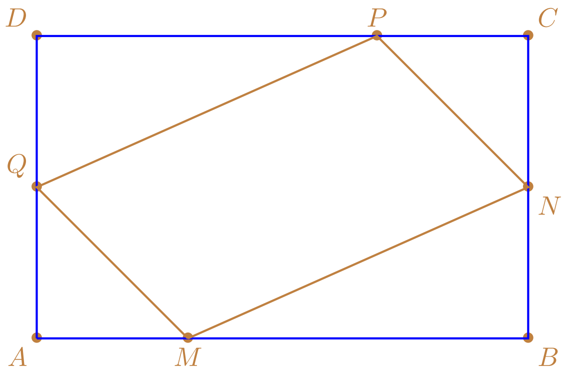
donc $MNPQ$ est un parallélogramme.

L'aire du parallélogramme $AMCP$ est, avec H le projeté orthogonal de P sur (AB)

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(AMCP) &= PH \times AM \\ &= AD \times x \\ &= 4 \times 4 \\ &= 16\end{aligned}$$

2. Choisir une valeur de x dans l'intervalle $]0{,}4[$ et construire la figure correspondante. Quelle est la nature du quadrilatère $MNPQ$?

Pour $x = 2$ nous obtenons la figure



Démontrons que $MNPQ$ est un parallélogramme

AMQ est rectangle en A car $ABCD$ est un rectangle. Donc, d'après le théorème de Pythagore nous avons l'égalité

$$MQ^2 = AM^2 + AQ^2$$

Autrement dit

$$MQ^2 = x^2 + (4-x)^2$$

et comme MQ est une longueur, donc est positive,

$$MQ = \sqrt{x^2 + (4-x)^2}$$

En considérant CPN nous obtiendrions de même :

$$PN = \sqrt{x^2 + (4-x)^2}$$

En procédant de même avec les triangles DQP et BNM nous établirions

$$MN = PQ = \sqrt{(6{,}5-x)^2 + x^2}$$

Ainsi $MNPQ$ est un quadrilatère (non croisé) dont les côtés opposés ont même longueur deux à deux.

Pour obtenir un résultat qui démontre aussi le fait que le quadrilatère est non croisé il est possible de travailler dans le repère orthonormé $\left(A, \frac{1}{AB}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{AD}\overrightarrow{AD}\right)$ et de démontrer que, par exemple, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

3. (a) On suppose que $0 < x < 4$. Exprimer l'aire de $MNPQ$ en fonction de x.

L'aire de $MNPQ$ est celle de $ABCD$ ôtée de celles des triangles BNM, CPN, DQP et AMQ

$$\mathcal{A}(MNPQ) = \mathcal{A}(MNPQ) - \mathcal{A}(BNM) - \mathcal{A}(CPN) - \mathcal{A}(DQP) - \mathcal{A}(AMQ)$$

Les triangles étant tous rectangles leurs aires se calculent aisément :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(MNPQ) &= 4 \times 6{,}5 - \frac{1}{2}(6{,}5 - x) \times x - \frac{1}{2}(4 - x) \times x - \frac{1}{2}(6{,}5 - x) \times x - \frac{1}{2}(4\\ &= 26 - (6{,}5 - x) \times x - (4 - x) \times x\end{aligned}$$

Donnons une expression développée, réduite et ordonnée de l'expression polynomiale

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(MNPQ) &= 26 - (6{,}5x - x^2) - (4x - x^2)\\ &= 26 - 6{,}5x + x^2 - 4x + x^2\\ &= 26 + 2x^2 - 6{,}10{,}5x\\ &= 2x^2 - 10{,}5x + 26\end{aligned}$$

(b) La formule obtenue en (a) fournit-elle le bon résultat si on l'applique à $x = 0$? à $x = 4$?

Pour $x = 0$ l'aire est celle de $ABCD$ et pour $x = 4$ l'aire a été calculé à l première question.

$$2 \times 0^2 - 10{,}5 \times 0 + 26 = 26$$
$$2 \times 4^2 - 10{,}5 \times 4 + 26 = 16$$

La formule fournit le bon résultat.

4. L'une des quatre courbes ci-dessous représente la variation de l'aire de $MNPQ$ en fonction de x. Laquelle ?

Puisque l'énoncé affirme que l'une des courbes convient procédons par élimination.
$\mathcal{A}(MNPQ)$ est une fonction polynomiale de degré donc sa courbe représentative est une parabole les figures 1 et 4 sont donc à exclure.
$\mathcal{A}(MNPQ)) = 26$ donc la figure 2 est à exclure.
Ainsi la courbe de la figure 3 représente les variations de l'aire de $MNPQ$ en fonction de x.

Montrons que la formule proposée par l'énoncé convient en la développant, en la réduisant puis en l'ordonnant

$$\begin{aligned}
2\left(x-\frac{21}{8}\right)^2+\frac{391}{32} &= 2\left(x^2-2\times x\times\frac{21}{8}+\left(\frac{21}{8}\right)^2\right)^2+frac39132\\
&= 2\left(x^2-\frac{21}{4}x+\frac{21^2}{8^2}\right)+\frac{391}{32}\\
&= 2x^2-\frac{21}{2}x+\frac{441}{32}+\frac{391}{32}\\
&= 2x^2-10{,}5x+\frac{441+391}{32}\\
&= 2x^2-10{,}5x+26\\
&= \text{Aire}(MNPQ)
\end{aligned}$$

La valeur minimale de l'aire est donc $\frac{391}{32}\approx 12{,}22$ et elle est atteinte pour $x=\frac{21}{8}=2{,}625$.

II Exercice 2 (4 points).

Dans cet exercice, sept affirmations sont proposées. Pour chacune d'elles, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point.
Une réponse fausse n'enlève pas de point.

1. Depuis 5 ans, les prix augmentent de 10% par an.
   Affirmation 1 : En 5 ans, les prix ont augmenté de 50%.

   Il y a 5 évolutions successives correspondant chacune à une augmentation de 10%. Le coefficient multiplicateur correspondant est donc

   $$CM = 1+\frac{10}{100}=1{,}1$$

   Le coefficient multiplicateur global correspondant à 5 évolutions est donc

   $$CM_g = 1{,}1\times1{,}1\times1{,}1\times1{,}1\times1{,}1=1{,}1^5=1{,}61051$$

   Donc le pourcentage d'évolution global est

   $$t_g = 100\times(CM_g-1)=61{,}051\%$$

   L'affirmation 1 est donc fausse.

2. **Affirmation 2** : En versant 5 volumes de sirop de fraise dans 9 volumes d'eau, on aura une boisson plus sucrée que si l'on verse 4 volumes du même sirop dans 7 volumes d'eau.

   La proportion de sirop dans le premier mélange est
$$\frac{5}{5+9} = \frac{5}{14}$$
   La proportion de sirop dans le second mélange est
$$\frac{4}{7+4} = \frac{4}{11}$$
   Or
$$\frac{5}{14} - \frac{4}{11} = \frac{5 \times 11 - 4 \times 14}{11 \times 14} = \frac{55-56}{11 \times 14} = -\frac{1}{11 \times 14} < 0$$
   donc le second mélange est plus sucré que le premier.
   L'affirmation 2 est fausse.

3. On utilise une roulette (de type casino) avec 5 cases numérotées 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5. Cette roulette est truquée. Le tableau ci-dessous précise la probabilité d'obtenir chacun des numéros (où p est un nombre positif).

Nombre obtenu	1	2	3	4	5
Probabilité	$\frac{1}{4}$	p	p	$\frac{3}{8}$	p

   Affirmation 3 : On a autant de chances d'obtenir un nombre pair qu'un nombre impair.

   Puisque le tableau est une distribution de probabilité la somme des probabilités égale 1
$$\frac{1}{4} + p + p + \frac{3}{8} + p = 1$$
   Équation du premier degré que nous résolvons en
$$p = \frac{1}{8}$$
   Or la probabilité d'un événement, si l'univers est fini, est la somme des probabilités des issues qui le réalise donc
$$P(\text{pair}) = p + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$
   et
$$P(\text{impair}) = \frac{1}{4} + p + p = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$
   L'affirmation 3 est vraie.

4. **Affirmation 4** : La différence entre les carrés de deux nombres entiers naturels consécutifs est égale à la somme de ces deux nombres entiers.

   Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}(n+1)^2 - n^2 &= n^2 + 2 \times n \times 1 + 1^2 - n^2 \\ &= 2n + 1 \\ &= n + (n+1)\end{aligned}$$

   L'affirmation 4 est vraie.

5. **Affirmation 5** : Si on augmente l'arête d'un cube de 10 %, alors le volume de ce cube augment de 33,1 %.

   Augmenter l'arête de 10 % revient à multiplier sa longueur par $1 + \frac{10}{100} = 1{,}2$. Son volume sera alors de

$$V = 1{,}1 \times 1{,}1 \times 1{,}1 = 1{,}1^3 = 1{,}331$$

   Le pourcentage d'augmentation du volume est donc

$$100 \times \frac{1{,}331 - 1}{1} = 33{,}1\ \%$$

   L'affirmation 5 est vraie.

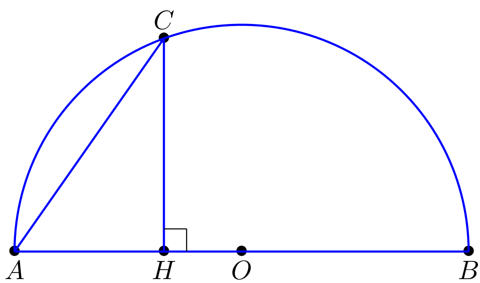
6. En position dite de « l'œuf », un skieur augmente de 50 % sa vitesse moyenne et descend ainsi la piste à 120 km/h.
   Affirmation 6 : Sans cette technique, sa vitesse moyenne n'est donc que de 60km/h.

   60 km/h augmenté de 50 % est

$$60 \times \left(1 + \frac{50}{100}\right) = 90$$

   L'affirmation 6 est donc fausse.

7. Sur la figure ci-dessous, C est un point du demi-cercle de diamètre $[AB]$.



Affirmation 7 : Si $AB = n$ et $AH = 1$, alors $AC = n$.

AHC est rectangle en H donc, d'après le théorème de Pythagore

$$AH^2 + HC^2 = AC^2$$

donc

$$HC^2 = AC^2 - AH^2$$

OHC est rectangle en H donc , d'après le théorème de Pythagore

$$OH^2 + HC^2 = OC^2$$

donc

$$HC^2 = OC^2 - OH^2$$

Par transitivité

$$\begin{aligned} AC^2 - AH^2 &= OC^2 - OH^2 \\ AC^2 - 1 &= \left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n}{2} - 1\right)^2 \\ AC^2 &= \frac{1}{4}n^2 - \left(\frac{1}{4}n^2 - n + 1\right) + 1 \\ AC^2 &= n \end{aligned}$$

Comme AC st une longueur donc positive

$$AC = \sqrt{n}$$

L'affirmation 7 est vraie.

III Exercice 3 (3 points).

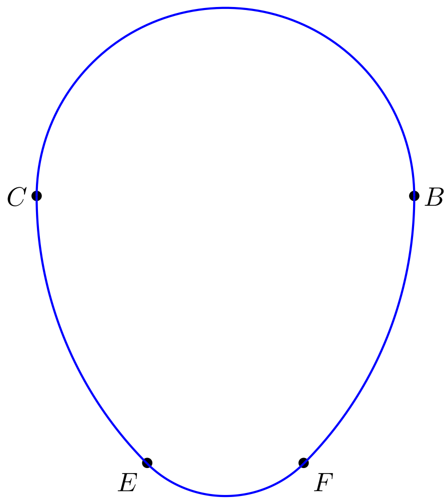
L'ove est une figure géométrique, constituée de quatre arcs de cercle, dont la forme fait penser à un œuf.

On a représenté ci-dessous un ove $BCEF$ (la figure n'est pas en vraie grandeur).

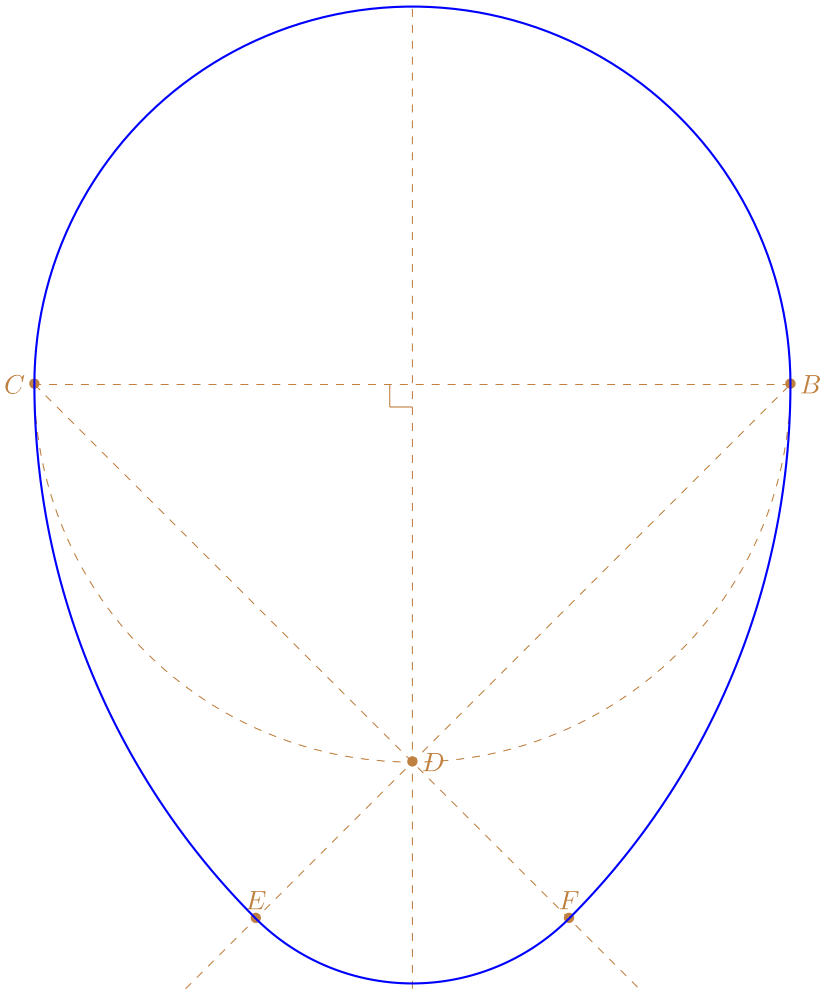
Pour cet ove on sait que :

- La partie supérieure de l'ove est un demi-cercle de diamètre $[BC]$ avec $BC =$ 10 cm et le reste de la figure est dans le demi-plan de frontière (BC) ne contenant pas ce demi-cercle.
- D est le point de ce demi-plan tel que le triangle BCD soit isocèle et rectangle en D.
- L'arc de cercle $\overset{\frown}{CE}$ a pour centre B avec BDE alignés.

- L'arc de cercle $\overset{\frown}{FB}$ a pour centre C avec CDF alignés.
- L'arc de cercle $\overset{\frown}{EF}$ a pour centre D.



1. Construire en vraie grandeur l'ove ainsi définie.



2. Calculer le périmètre de l'ove construit à la question précédente (on donnera le résultat arrondi au millimètre).

   Le plus simple est de considérer directement les angles en radians. Il est néanmoins possible de raisonner avec les angles degrés.

   L'arc $\overset{\frown}{BC}$ est la moitié d'un cercle de rayon de longueur 5, sa longueur est donc
$$\frac{2\pi \times 5}{2} = 5\pi$$

$\widehat{CBD} = 45°$ donc, par proportionnalité, l'arc $\overset{\frown}{CE}$ mesure

$$\frac{45}{360} \times 2\pi \times 10 = \frac{5}{4}\pi$$

De même l'arc $\overset{\frown}{FB}$ mesure

$$\frac{5}{4}\pi$$

Pour calcule la longueur de l'arc $\overset{\frown}{EF}$, calculons DE.

DBC est isocèle-rectangle en D, donc, d'après le théorème de Pythagore,

$$2DB^2 = CB^2$$

Donc

$$DB = \sqrt{\frac{10^2}{2}} = 5\sqrt{2}$$

Or $BE = 10$ et $D \in [BE]$ donc $DE = BE - BD = 10 - 5\sqrt{2}$ Nous en déduisons la longueur de l'arc $\overset{\frown}{EF}$

$$\frac{\pi}{2}(10 - 5\sqrt{2})$$

Finalement le périmètre de l'ove est

$$5\pi + 2 \times \frac{5}{4}\pi + \frac{\pi}{2}(10 - 5\sqrt{2}) \approx 28{,}2 \text{ mm}$$