CRPE épreuve de mathématique 2012 groupe 2.

Exercice 1. (3 points)

Dans cet exercice, 5 affirmations sont proposées. Pour chacune, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, puis justifier la réponse.

Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point.

Une réponse fausse n'enlève pas de point.

1. Soient a et b deux nombres strictement positifs.
   Affirmation 1 : $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$.

   Si $a=9$ et $b=16$ alors $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$ et $\sqrt{a+b}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

   L'affirmation 1 est fausse.

2. Soit a un nombre strictement supérieur à 1.

   Affirmation 2 : Si les longueurs des côtés d'un triangle sont a, $\frac{1}{2}(a^2-1)$ et $\frac{1}{2}(a^2+1)$, alors ce triangle est rectangle.

   Nous remarquons

$$\begin{aligned} a^2+\left[\frac{1}{2}(a^2-1)\right]^2 &= a^2+\frac{1}{4}(a^2-1)^2 \\ &= a^2+\frac{1}{4}(a^4-2a^2+1) \\ &= a^2+\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{2}a^2+1 \\ &= \frac{1}{4}a^4+\frac{1}{2}a^2+1 \\ &= \frac{1}{4}(a^4+2a^2+1) \\ &= \left[\frac{1}{2}(a^2+1)\right]^2 \end{aligned}$$

   D'après le théorème de Pythagore nous pouvons affirmer que ce triangle est rectangle.

   L'affirmation 2 est vraie.

3. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.

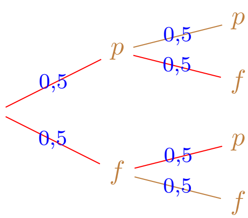
   Affirmation 3 : La probabilité d'obtenir pile à l'un des deux lancers et face à l'autre est $\frac{1}{3}$.

* Épreuve de Bernoulli.
  Expérience : lancer une pièce parfaitement équilibrée.
  Succès : « obtenir pile ».
  Probabilité de succès : $p = 0{,}5$.
* Schéma de Bernoulli.
  La précédente épreuve de Bernoulli est répétée $n = 2$ fois à l'identique et de façon indépendante. Donc il s'agit d'un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 2$ et $p = 0{,}5$.
* Loi binomiale.
  Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de pile obtenus. X compte le nombre de succès du schéma de Bernoulli, donc X suit une loi binomiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(2; 0{,}5)$.

Obtenir face à l'un des lancers et pile à l'autre est l'événement $(X = 1)$.
Or

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \binom{2}{1} p^1 \times (1-p)^{(2-1)} \\ &= 2 \times 0{,}5 \times 0{,}5 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Nous pourrions également représenter la situation par un arbre probabiliste :



Nous voyons sur l'arbre

$$P(X = 2) = P(pf) + P(fp)$$

Or, d'après le principe multiplicatif : $P(pf) = P(fp) = 0{,}5 \times 0{,}5$, donc

$$P(X = 2) = 2 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = \frac{1}{2}$$

L'affirmation 3 est fausse.

4. Un article a le même prix dans deux magasins A et B.

   Dans le magasin A, le prix de l'article subit successivement une baisse de 20% puis une hausse de 20%.

   Dans le magasin B, le prix de l'article subit successivement une hausse de 20% puis une baisse de 20%.

   Affirmation 4 : À la suite de ces modifications de prix, il est plus rentable d'acheter alors l'article dans le magasin A que dans le magasin B.

   Calculons les évolutions globales dans chacun des magasins en utilisant les coefficients multiplicateurs.

   * $CM_A = \left(1 - \frac{20}{100}\right)\left(1 + \frac{20}{100}\right) = 0{,}96$. Le taux d'évolution global est donc $0{,}96 - 1 = -0{,}04$ autrement dit il s'agit d'une baisse de 4%.
   * De même $CM_B = \left(1 + \frac{20}{100}\right)\left(1 - \frac{20}{100}\right) = 0{,}96$. Le taux d'évolution global est donc $0{,}96 - 1 = -0{,}04$ autrement dit il s'agit d'une baisse de 4%.

   Les prix après les évolutions sont encore les mêmes dans les deux boutiques.

   L'affirmation 4 est fausse.

5. La longueur du côté d'un carré augmente de 5%.

   Affirmation 5 : le périmètre du carré augmente de 20%.

   Le périmètre d'un carré de côté de longueur c est $4c$. Si c augmente 5% alors la nouvelle longueur du côté est $c \times \left(1 + \frac{5}{100}\right) = 1{,}05 \times c$. Donc le nouveau périmètre du carré est $4\,(1{,}05 \times c) = 1{,}05\,(4 \times c)$. Autrement dit le périmètre a été augmenté lui aussi de 5%.

   L'affirmation 5 est fausse.

Exercice 2. (5 points)

On justifiera toutes les réponses.

On appelle « fraction égyptienne » toute fraction de la forme $\frac{1}{n}$, n désignant un nombre entier naturel non nul. Dans l'Egypte ancienne, on n'écrivait les nombres rationnels positifs inférieurs à 1 que sous la forme de sommes de « fractions égyptiennes » toutes différentes.

$$\text{Par exemple, } \frac{25}{28} \text{ peut s'écrire } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7}.$$

Le but du problème est de présenter quelques méthodes de décomposition de nombres rationnels en somme de « fractions égyptiennes » toutes différentes.

Partie A : Exemples.

1. Calculer la somme des six « fractions égyptiennes » $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ et $\frac{1}{64}$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64} &= \frac{32\times 1}{32\times 2}+\frac{16\times 1}{16\times 4}+\frac{8\times 1}{8\times 8}+\frac{4\times 1}{4\times 16}+\frac{2\times 1}{2\times 32}+\frac{1}{64}\\ &= \frac{32+16+8+4+2+1}{64}\\ &= \frac{63}{64}\end{aligned}$$

2. Décomposer $\frac{5}{8}$ en somme de « fractions égyptiennes » toutes différentes, dont les dénominateurs sont tous des puissances de 2.

   $\frac{5}{8}=\frac{4}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$

Partie B : Présentation d'une méthode de décomposition dans un cas particulier.

On s'intéresse au cas où la fraction à décomposer a un numérateur égal à 2 et un dénominateur égal au produit de deux nombres entiers naturels impairs p et q.

1. Démontrer la formule

$$\frac{2}{pq}=\frac{1}{p\left(\frac{p+q}{2}\right)}+\frac{1}{q\left(\frac{p+q}{2}\right)}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{p\left(\frac{p+q}{2}\right)}+\frac{1}{q\left(\frac{p+q}{2}\right)} &= \frac{q}{pq\left(\frac{p+q}{2}\right)}+\frac{p}{pq\left(\frac{p+q}{2}\right)}\\ &= \frac{p+q}{pq\left(\frac{p+q}{2}\right)}\\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}pq}\\ &= \frac{2}{pq}\end{aligned}$$

2. Justifier que les dénominateurs des fractions précédentes sont des nombres entiers naturels.

   Puisque p et q sont impairs $p+q$ est paire, donc divisible par 2. Ainsi $\frac{p+q}{2}$ est une entier naturel.

3. **En utilisant la formule établie à la question 1)**, trouver deux décompositions différentes de $\frac{2}{15}$ en somme de « fractions égyptiennes » différentes.

   Puisque $15 = 1 \times 15$, d'après la question précédente

   $$\frac{2}{15} = \frac{1}{1 \times \frac{1+15}{2}} + \frac{1}{15 \times \frac{1+15}{2}} = \frac{1}{8} + \frac{1}{120}$$

   Puisque $15 = 3 \times 5$, d'après la question précédente

   $$\frac{2}{15} = \frac{1}{3 \times \frac{3+5}{2}} + \frac{1}{5 \times \frac{3+5}{2}} = \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$$

4. Soit n un nombre entier naturel non nul. Donner une décomposition de la fraction $\frac{2}{2n+1}$ en somme de deux « fractions égyptiennes » différentes.

   Puisque $2n+1 = 1 \times (2n+1)$, d'après les questions précédentes

   $$\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{1 \times \frac{1+(2n+1)}{2}} + \frac{1}{(2n+1) \times \frac{1+(2n+1)}{2}} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(2n+1)(n+1)}$$

Partie C : « Algorithme glouton » de Fibonacci.

En 1201, Léonard de Pise (1175-1250), dit « Fibonacci », prouva que tout nombre rationnel compris entre 0 et 1 peut s'écrire sous la forme d'une somme de « fractions égyptiennes » toutes différentes et proposa la méthode suivante pour obtenir une telle décomposition :

« Soustraire à la fraction donnée la plus grande fraction égyptienne possible qui lui est inférieure, répéter l'opération avec la nouvelle fraction, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on obtienne 0. »

1. Appliquer cet algorithme à $\frac{13}{81}$ et donner une décomposition de la fraction $\frac{13}{81}$ en somme de trois « fractions égyptiennes » toutes différentes.

   (a) Soit n un entier naturel non nul. Dire que $\frac{1}{n}$ est la plus grande fraction qui soit inférieure à $\frac{13}{81}$ c'est dire que n est le plus petit entier naturel non nul tel que $\frac{1}{n} \leq \frac{13}{81}$.
   Or
   $$\frac{1}{n} \leq \frac{13}{81} \Leftrightarrow \frac{81}{13} \leq n$$
   et
   $$81 = 13 \times 6 + 3$$
   donc $7 \leq n$.

(b) $\frac{13}{81} - \frac{1}{7} = \frac{13\times 7 - 1\times 81}{81\times 7} = \frac{10}{567}$.
Nous recherchons à nouveau le plus petit entier naturel n non nul tel que $\frac{1}{n} \leq \frac{10}{567}$.
Donc : $\frac{567}{10} \leq n$ et enfin $57 \leq n$.

(c) $\frac{10}{567} - \frac{1}{57} = \frac{10\times 57 - 1\times 567}{567\times 57} = \frac{3}{32\,319} = \frac{1}{10\,773}$.

En reprenant les calculs précédents nous obtenons avec l'algorithme de Fibonacci

$$\frac{13}{81} = \frac{1}{7} + \frac{1}{57} + \frac{1}{10\,773}$$

2. (a) Écrire $\frac{256}{81}$ sous la forme d'une somme d'un entier naturel et d'une fraction comprise entre 0 et 1.

Division euclidienne : $256 = 81 \times 3 + 13$ donc

$$\frac{256}{81} = 3 + \frac{13}{81}$$

(b) Proposer une écriture de l'approximation de π donnée dans le papyrus Rhind sous forme d'une somme d'un nombre entier naturel et de « fractions égyptiennes » toutes différentes.

En utilisant de deux précédentes questions

$$\frac{256}{81} = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{57} + \frac{1}{10\,773}$$

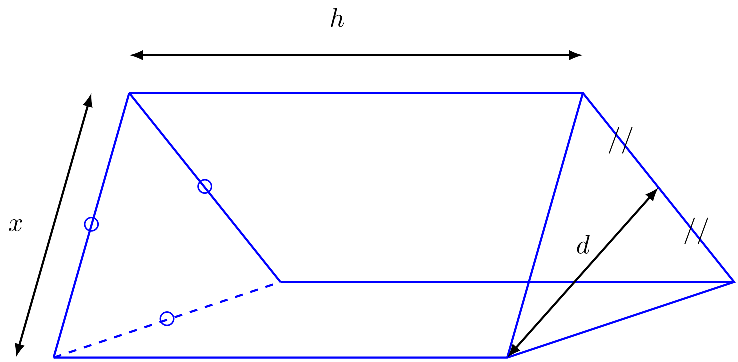
Donc

$$\pi \approx 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{57} + \frac{1}{10\,773}$$

Exercice 3. (4 points)

On justifiera toutes les réponses.

Un fabricant vend de la pâte d'amande dans un emballage cartonné ayant la forme d'un prisme droit dont la base est un triangle équilatéral (voir la figure ci-dessous).

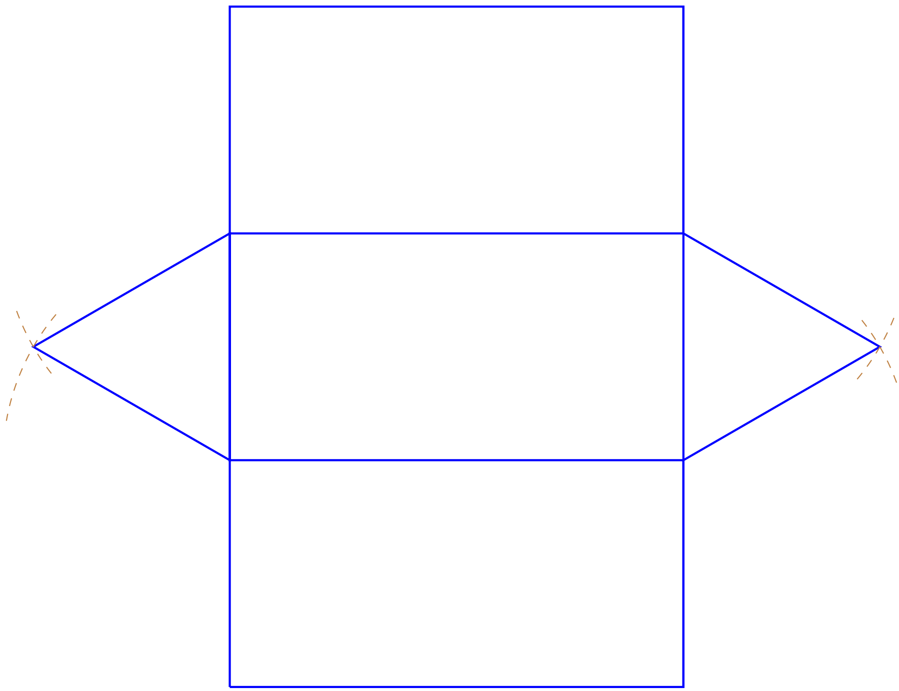


- x est la longueur d'un côté de la base triangulaire.
- d est la hauteur de cette base triangulaire.
- h est la hauteur du prisme droit.

Dans tout l'exercice, on exprime les longueurs en cm, les aires en cm2 et les volumes en cm3.

Questions préalables

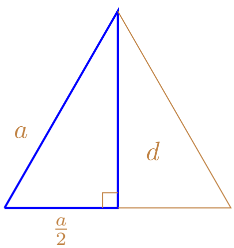
1. Représenter sur la copie un patron de l'emballage pour les valeurs $x = 3$ cm et $h = 6$ cm.



2. On désigne par A l'aire du triangle équilatéral de base. Montrer que

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2.$$

Déterminons l'aire d'un triangle équilatéral de coté de longueur a.
Pour cela commençons par calculer la longueur d de la hauteur.



D'après le théorème de Pythagore

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + d^2 = a^2$$

Nous en déduisons successivement

$$\begin{aligned} d^2 &= a^2 - \frac{1}{4}a^2 \\ &= \frac{3}{4}a^2 \end{aligned}$$

Puis a et d étant positifs

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Nous en déuisons l'aire du triangle équilatéral

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}a \times d \\ &= \frac{1}{2}a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \end{aligned}$$

Dans la suite du problème, les emballages ont un volume égale à **100 cm³**.

3. (a) Donner l'expression de h en fonction de x.

Le volume du prisme délimité par l'emballage est

$$100 = h \times A$$

ce qui équivaut successivement à

$$\begin{aligned} 100 &= h\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \\ h &= \frac{100}{\frac{\sqrt{3}}{4}x^2} \\ h &= \frac{400}{\sqrt{3}x^2} \end{aligned}$$

(b) En déduire que l'aire S du patron de cet emballage, exprimée en cm^2, est donnée par la formule

$$S = \frac{400\sqrt{3}}{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2.$$

$$\begin{aligned} S &= 2A + 3 \times x \times h \\ &= 2\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + 3x\frac{400}{\sqrt{3}x^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{400\sqrt{3}}{x} \\ &= \frac{400\sqrt{3}}{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 \end{aligned}$$

4. On a construit une feuille de calcul reproduite ci-après, donnant les valeurs de S en fonction des valeurs de x, ainsi que la représentation graphique de S en fonction de x.

(a) Donner une méthode permettant de remplir la colonne `A` (de la ligne 2 à 35) en utilisant la fonction de « recopie vers le bas ».

Il faut mettre 0,5 en cellule `A2` puis mettre en `A3` la formule

$$= \texttt{A2} + 0{,}5$$

Puis par recopie vers le bas de la cellule `A3` nous obtiendrons le colonne `A`.

(b) Donner une formule qui, entrée dans la cellule `B2`, puis recopiée vers le bas, permet de compléter la colonne `B` (de `B3` à `B35`).
Indication : pour calculer $\sqrt{3}$ dans le tableur, on fait appel à la commande : « racine(3) ».

Formule entrée en `B2` :

$$= 400 * \text{racine}(3)/\texttt{A2} + \text{racine}(3) * \texttt{A2} * \texttt{A2}/2$$

Le fabricant souhaite minimiser la quantité de carton utilisée.

(c) En utilisant les résultats de la feuille de calcul reproduite ci-après, donner à 0,5 cm près la valeur de x qui minimise la quantité de carton utilisée pour l'emballage.

D'après le tableur le minimum de S (qui semble proche de 141,09) est atteint lorsque x est proche de 7,5.

(d) Calculer la hauteur de l'emballage pour cette valeur approchée de x.

$$S(7{,}5) = \frac{400\sqrt{3}}{7{,}5} + \frac{\sqrt{3}}{2}7{,}5^2$$

Avec la calculatrice :

$$S(7{,}5) \approx 141{,}09$$

FEUILLE DE CALCUL

	A	B
1	x	**Aire S**
2	0,5	1385,86
3	1	693,69
4	1,5	463,83
5	2	349,87
6	2,5	282,54
7	3	238,73
8	3,5	208,56
9	4	187,06
10	4,5	171,50
11	5	160,21
12	5,5	152,16
13	6	146,65
14	6,5	143,18
15	7	141,41
16	7,5	141,09
17	8	142,03
18	8,5	144,08
19	9	147,13
20	9,5	151,09
21	10	155,88
22	10,5	161,46
23	11	167,77
24	11,5	174,78
25	12	182,44
26	12,5	190,74
27	13	199,65
28	13,5	209,15
29	14	219,23
30	14,5	229,86
31	15	241,04
32	15,5	252,76
33	16	265,00
34	16,5	277,76
35	17	291,04

Aire S du patron de l'emballage en fonction de x