CRPE épreuve de mathématique 2012 groupe 1.

Exercice 1.

1. $\frac{1}{4} < \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

   L'affirmation 1 est fausse.

2. La somme des chiffres du numérateur égale 30 qui est divisible par 3, donc le numérateur est divisible par 3.

   La somme des chiffres du dénominateur égale 39 qui est divisible par 3, donc le numérateur est divisible par 3.

   3 est diviseur commun aux numérateur et dénominateur donc la fraction n'est pas irréductible.

   L'affirmation 2 est vraie.

3. L'univers constitué des chocolats comporte $35 + 20 = 55$ issues. Toutes ces issues sont équiporbables (« indiscernables au toucher »). L'événement A :« le chocolat extrait est blanc peut être réalisé par 20 issues. Nous en déduisons la probabilité
$$P(A) = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$$

4. Le taux d'évolution en pourcentage entre 2009 et 2008 est
$$t\% = 100 \times \frac{32{,}8 - 25}{25} = 31{,}2\%$$

   Le pourcentage de l'article est probablement le pourcentage de baisse entre 2008 et 2009.

   L'affirmation 4 est fausse.

5. Travaillons par conditions nécessaires et suffisantes.

   Supposons donc qu'il existe n tel que décrit dans l'énoncé.

   Procédons aux divisions euclidiennes $11\,000 = 545 \times 20 + 100$

   et $12\,000 = 545 \times 22 + 10$

   Ainsi le n recherché, s'il existe, ne peut être que $545 \times 21 = 11\,445$ et $545 \times 22 = 11\,990$.

   Supposons dorénavant que $n = 11\,445$ ou $n = 11\,990$. Recherchons les diviseurs de ces deux nombres autres que 545.

   $11\,445 = 545 \times 3 \times 7$ ou $11\,990 = 545 \times 2 \times 2$. Par hypothèse le plus grand diviseur commun de n et de $2\,180 = 545 \times 2 \times 2$, la valeur $11\,445$ ne peut donc être retenue contrairement à $np11990$.

   L'affirmation 5 est vraie.

6. L'affirmation signifierait que le poids de la boule et le poids de peinture sont proportionnels.
   Le poids est proportionnel au volume de la boule qui est une fonction du cube du rayon.
   La quantité de peinture nécessaire est proportionnelle à la surface de la boule qui est une fonction du carré du rayon.
   Ces deux grandeurs ne sont donc pas proportionnelles.

   Détaillons de façon numérique.
   Notons m la masse volumique, en kg.m^{-3}, du bois utilisé et s la masse de peinture, en kg, nécessaire pour 1 m^2.

$$24 = m \times \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ et } 3 = m\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \left(\frac{R}{r}\right) = 3$$

   et donc : $\frac{R}{r} = 2$.
   En notant x la masse de peinture n kilogrammes nécessaire pour la petite boule :

$$0{,}9 = s \times 4\pi R^2 \text{ et } x = s \times 4\pi r^2 \Rightarrow \frac{0{,}9}{x} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = 4$$

   donc $x = \frac{0{,}9}{4} = 0{,}225$ kg.

   L'affirmation 6 est fausse.

Exercice 2.

1. (a) $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$.
   (b)

$$\begin{aligned}(3n)^2 + (4n)^2 &= 3^2n^2 + 4^2n^2 \\ &= 9n^2 + 16n^2 \\ &= (9+16)n^2 \\ &= 25n^2 \\ &= 5^2n^2 \\ &= (5n)^2\end{aligned}$$

   (c) On déduit de la question précédente (avec $n = 1000$) que (3000,4000,5000) est un triplet Pythagoricien.
2. (a) Formule entrée en D12 :

```
=B2*B2-A2*A2
```

(b) Ligne 12

	A	B	C	D	E	F	G
12	4	5	40	9	41	1681	1681

(c) Au vu des colonnes F et G il semble que le triplet (a,b,c) soit pythagoricien.

Démontrons le.

$$\begin{aligned}
a^2+b^2 &= (2xy)^2+(y^2-x^2)^2 \\
&= 4x^2y^2+y^4-2x^2y^2+x^4 \\
&= y^4+2x^2y^2+x^4 \\
&= (y^2)^2+2(x^2)(y^2)+(x^2)^2 \\
&= (y^2+x^2)^2 \qquad\qquad\qquad\qquad = c^2
\end{aligned}$$

3. Raisonnons par conditions nécessaires et suffisantes.

$\Rightarrow$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n^2+(n+1)^2=(n+2)^2$. Autrement dit $(n,n+1,n=2)$ est un triplet pythagoricien.

$$\begin{aligned}
n^2+(n+1)^2=(n+2)^2 &\Leftrightarrow n^2+n^2+2n+1=n^2+4n+4 \\
&\Leftrightarrow n^2-2n-3=0
\end{aligned}$$

Recherchons les racines réelles du trinôme $P(X)=X^2-2X-3$.
$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times 1\times(-3)=16>0$ donc le trinôme admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)-\sqrt{4}}{2\times 1} = 1 \qquad\qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)+\sqrt{4}}{2\times 1} = 3$$

Ainsi nécessairement $n \in \{1,3\}$.

$\Leftarrow$. i. Si $n=1$ alors $n^2+(n+1)^2=1+2^2=5$ et $(n+2)^2=3^2=9$. Ce n'est donc pas un triplet pythagoricien.

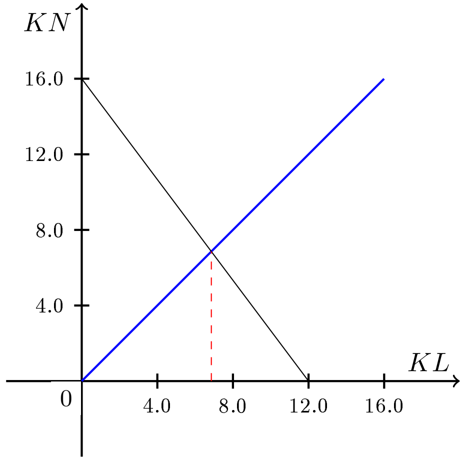
ii. Si $n=3$ nous avons déjà démontré qu'il s'agit d'un triplet pythagoricien.

$\Leftrightarrow$ il n'y a qu'un seul triplet pythagoricien qui soit constitué d'entiers consécutifs.

Exercice 3.

1. H est le pied de la hauteur de ABC issue de C, donc AHC et BHC sont des rectangles en H.
   Nous en déduisons avec le théorème de Pythagore
   $$\begin{cases} AH^2 + HC^2 = AC^2 \\ BH^2 + HC^2 = BC^2 \end{cases}$$
   En soustrayant membre à membre ces deux égalités
   $$AH^2 - BH^2 = AC^2 - BC^2$$
   Or $BH = 14 - AH$, $AC = 13$ et $BC = 15$ donc
   $$AH^2 - (14 - AH)^2 = 13^2 - 15^2$$
   ce qui équivaut successivement à
   $$\begin{aligned} AH^2 - (196 - 28AH + AH^2) &= -56 \\ 28AH &= 196 - 56 \\ AH &= \frac{140}{28} \\ AH &= 5 \end{aligned}$$
   De l'égalité $AH^2 + HC^2 = AC^2$ nous déduisons
   $$HC^2 = AC^2 - AH^2 = 13^2 - 5^2 = 144$$
   et comme HC est une longueur donc positive
   $$HC = \sqrt{144} = 12$$

2. (a) C'était prévisible car $0 \leq KL \leq CH = 12$ et $0 \leq KN \leq AB = 14$.
   (b) Le rectangle $KLMN$ est un carré si et seulement si $KN = KL$ donc lorsque KL égale l'abscisse du point d'intersection de la courbe et de la première bissectrice.



Autrement dit $KN = KL \approx 7$.

3. (a) Exprimons AK en fonction de KL.

* Configuration de Thalès.
  Les droites (LC) et $KH)$ sont sécantes en A.
  Les points A, L, C d'une part et A, K, H d'autre part sont alignés dans le même ordre.
* Théorème de Thalès.
  Les droites (KL) et $CH)$ sont parallèles puisque toutes deux perpendiculaires à (AB).
  Donc d'aprés le théorème de Thalès

$$\frac{AK}{AH} = \frac{KL}{CH}$$

Autrement dit

$$AK = AH \times \frac{KL}{CH} = \frac{5}{12}KL$$

De même nous montrerions que d'après le théorème de Thalès

$$\frac{BN}{BH} = \frac{MN}{CH}$$

et comme $BH = 14 - 5 = 9$, $MN = KL$, $CH = 12$

$$BN = \frac{9}{12}KL = \frac{3}{4}KL$$

(b) Les points A, K, N, B sont alignés dans cet ordre donc

$$\begin{aligned} KN &= AB - AK - NB \\ &= 14 - \frac{5}{12}KL - \frac{3}{4}KL \\ &= 14 - \frac{14}{12}KL \\ &= 14 - \frac{7}{6}KL \end{aligned}$$

4. Le rectangle $KLMN$ est un carré si et suelement si $KL = KN$. Autrement dit, d'après la question précéente si et seulement si

$$KL = 14 - \frac{7}{6}KL$$

C'est une équation du premier degré d'inconnue KL dont l'unique solution est :

$$KL = \frac{6}{13} \times 14$$