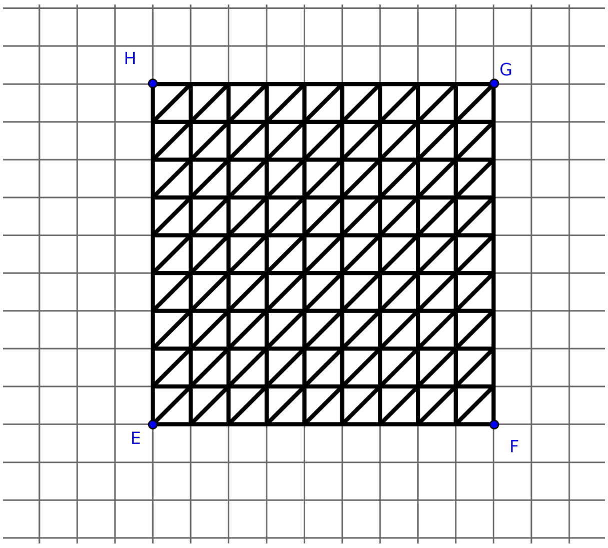
1 Exercice

Soit a et b deux chiffres.
En appliquant l'algorithme de l'énoncé au nombre $\overline{ab}$ on obtient : $\overline{ab} - a - b = 10.a + b - a - b = 9a$.
Le nombre obtenue est donc un multiple de 9 inférieur ou égale à 81.
On remarque que tous les multiples de 9 dans le tableau sont des symboles de visages souriants.

2 Exercice

1. deux côtés consécutifs d'un carré forment un triangle isocèle rectangle dont l'hypoténuse est la diagonale du carré. D'après le théorème de Pythagore la longueur l de la diagonale vérifie : $l^2 = 2x^2$. Puisque x et l sont des longueurs donc des grandeurs positives : $l = x\sqrt{2}$.
2. (a) L'aire du carré $ABCD$ est : $\mathcal{A}(ABCD) = c^2$.
   L'aire, $\mathcal{A}(EFGH)$, du carré $EFGH$ est la moitié de l'aire de $ABCD$ donc : $\mathcal{A}(EFGH) = \frac{1}{2}c^2$.
   (b) L'aire du carré $EFGH$ est : $\mathcal{A}(EFGH) = EF^2$ donc, d'après la question précédente : $EF^2 = \frac{1}{2}c^2$. les quantités considérées étant toutes positives : $EF = \frac{\sqrt{2}}{2}c$.
   (c) D'après la question liminaire : $EG = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}c = c$.
3. Instruction 1 Construire un carré $ABCD$ de 6cm de côté.
   Instruction 2 Tracer les diagonales de ce carré.
   Instruction 3 Tracer le cercle de centre le point d'intersection des diagonales et de rayon le 3cm.
   Instruction 4 Relier par des segments les points d'intersections des diagonales et du cercle pour faire apparaître le carré $EFGH$.
4. (a) Il faut deux dalles triangulaires pour faire un carré de côté a. Comme l'aire de $EFGH$ est 18 on a : $\frac{1}{2}n.a^2 = 18$. Donc $n.a^2 = 36$.
   (b) De la précédente relation on déduit : $a^2 = \frac{36}{n}$. Donc $a^2 \leq 36$. Ainsi : $a^2 \in \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$.
   Comme de plus a^2 doit diviser 36, on peut exclure 16 et 25 des valeurs possibles de a^2.
   Nécessairement : $a^2 \in \{1, 4, 9, 36\}$.
   On vérifie immédiatement que les couples (n, a) qui vérifient la relation (1) sont : $\{(36; 1), (9; 2), (4; 3), (1;$
   (c)



   (d) Si $a = 2$, alors $a^2 = 4$ donc $n = 9$. Or s'il y a 9 triangle on ne peut former un nombre exacte de carré et on ne peut donc pas recouvrir exactement le carré avec ces dalles triangulaires.

3 Exercice

1. Le volume de la pyramide est $V_{Py} = \frac{1}{3} \times SK \times EF \times EH = \frac{1}{3} \times SK \times AB \times AD = \frac{1}{3} \times 5 \times 6 \times 8 = 80\text{cm}^3$.
   Le volume du parallélépipède est : $V_{Pa} = AB \times AD \times AE = 6 \times 8 \times 10 = 480\text{cm}^3$.
   Le volume du verre est donc : $V = 480 + 80 = 560\text{cm}^3$.
   Donc : $V_{Py} = \frac{560}{1000} = 0,56\text{dm}^3 = 0,56\text{L}$.
2. (a) Le volume de sirop de fraise est $0,56 \times \frac{25}{100} = 0,14\text{L}$. Ce qui coûte : $2 \times 0,14 = 0,28$€.
   Le volume de jus d'orange est $0,56 \times \frac{33}{100} = 0,1848\text{L}$. Ce qui coûte : $2,4 \times 0,1848 \simeq 0,44$€.
   Le volume d'eau gazeuse est $0,56 - 0,14 - 0,1848 = 0,2352\text{L}$. Ce qui coûte : $0,2352 \times 0,5 \simeq 0,12$€.
   Le prix de revient d'un verre de ce cocktail est donc : $0,28 + 0,44 + 0,12 = 0,84$€.

   (b) Le coût du cocktail est : $0,56\left[\frac{33}{100} \times 2,4 + \frac{25}{100} \times 2 + \frac{42}{100} \times 0,5\right]$. Si le coût du cocktail est augmenté de 5% il vaut : $0,84 \times 1,05 = 0,882$€.
   Si le sirop de fraise augment de 20% alors le nouveau prix du cocktail est : $0,56\left[\frac{33}{100} \times 2,4 + \frac{25}{100} \times (2 \times (1$
   $0,56\left[\frac{33}{100} \times 2,4 + \frac{25}{100} \times 2,4 + \frac{42}{100} \times 0,5\right] = 0,89712$€.
   L'affirmation de l'énoncé est donc fausse.
3. (a) Le triangle FHG est rectangle en G donc, d'après le théorème de Pythagore : $FH^2 = FG^2 + GH^2$. Avec les données numériques de l'énoncé : $FH^2 = 8^2 + 6^2 = 100$. Donc $FH = 10\text{cm}$.
   K étant le milieu de la diagonale $[FH]$ du rectangle $EFGH$: $FK = \frac{1}{2} \times FH = 5\text{cm}$.
   Pour représenter à l'échelle 1/2 on divise toutes les longueurs par 2.

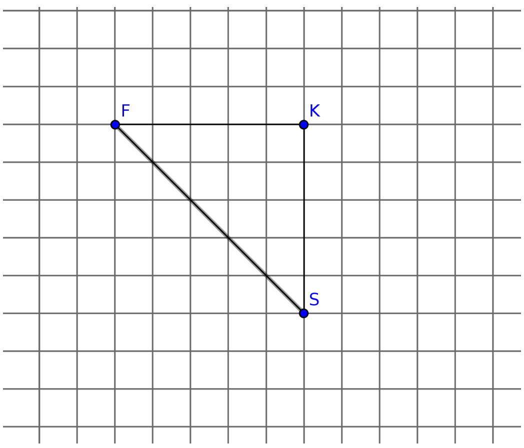


FIGURE 1 – Triangle FSK.

   (b)

   (c) La contenance du verre étant de 0,56L le modèle réduit à l'échelle 1/2 a une contenance de : $0,56 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0,07\text{L} = 7\text{cL}$.

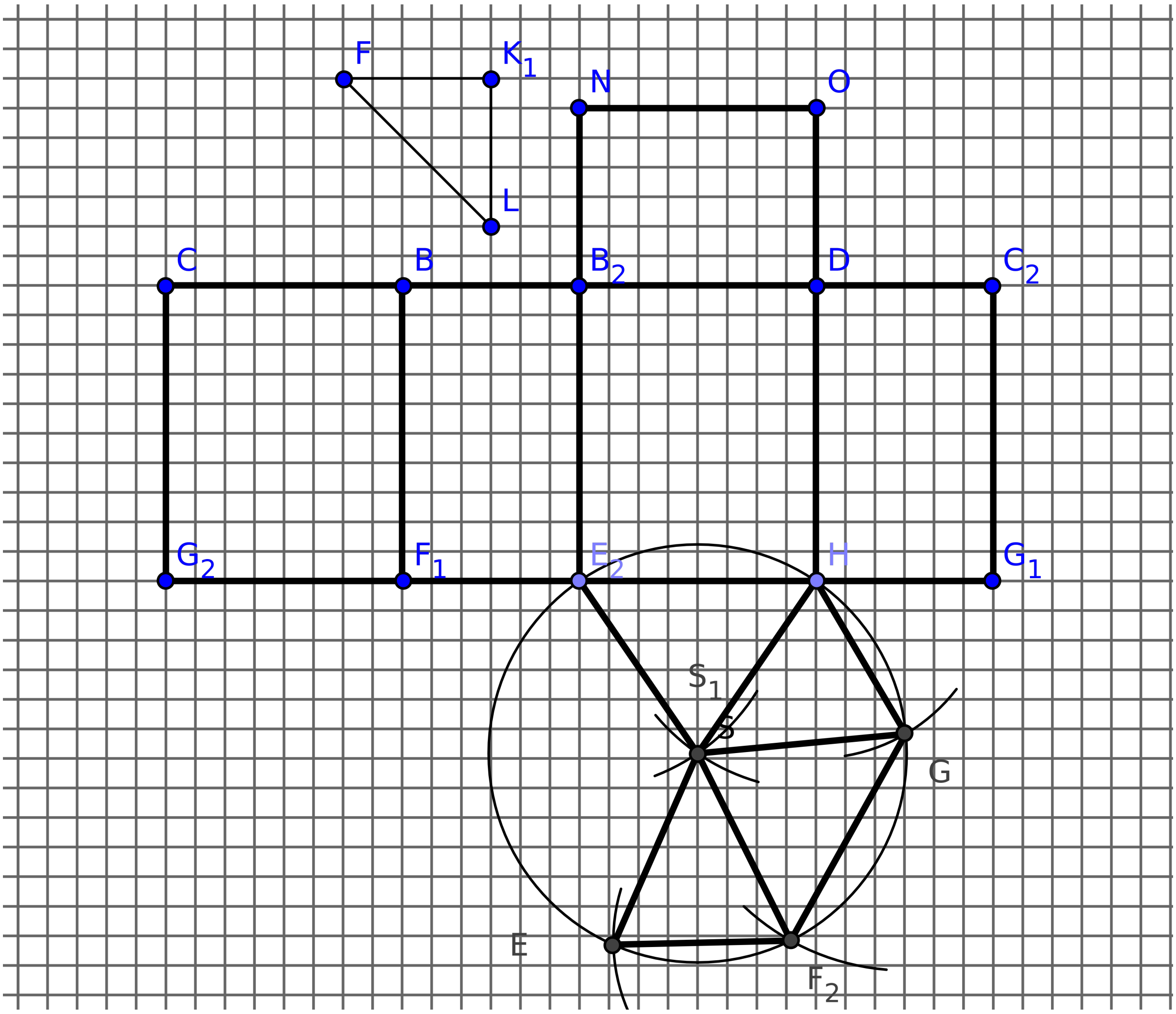


FIGURE 2 – Patron du verre.