1 Exercice

Partie A.

1. Puisque E et f sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$ et $[CD]$ du carré $ABCD$ donc (EF) est parallèle à (AD) ; on en déduit que $AEFD$ est un parallélogramme et comme l'angle $(\widehat{EAD})$ est droit $AEFD$ est un rectangle.
2. On remarque une configuration de Thalès :
   * les points A, O et C sont alignés dans cet ordre,
   * les points D, F et C sont alignés dans cet ordre,
   * les droites (AC) et (DC) se coupent en C.

   Or les droites (OE) et (AD) sont parallèles donc, d'après le théorème de Thalès : $\frac{OC}{AC} = \frac{CF}{CD}$.
   Autrement dit : $\frac{OC}{AC} = \frac{1}{2}$.
   On en déduit que O est le milieu de $[AC]$.
   D'après ce même théorème on a encore : $\frac{OF}{AD} = \frac{CF}{CD}$. Donc : $2OF = AD$. Or $AD = EF$ puisque $AEFD$ est un rectangle, donc $2OF = EF$. Ainsi O est le milieu de EF.
3. O est aussi le milieu de $[DB]$ car $ABCD$ est un carré. Donc (DE) et (AO) sont des médianes du triangle ABD. Donc O est le centre de gravité de ABD et donc $AG = 2GO$. Autrement dit : $\frac{AG}{GO} = 2$.
4. (AO) est une médiane du triangle AEF or G est un point du segment $[AO]$ et situé au deux tiers de la médiane, d'après la question précédente, donc G est le centre de gravité du triangle AEF.

Partie B.

1. L'aire du triangle, rectangle en E, AEO est : $\mathcal{A}(AEO) = \frac{1}{2} \times AE \times EO = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
2. Si l'on note H le projeté orthogonal de E sur (AO) on remarque d'une part que l'aire de AOG est $\mathcal{A}(AOG) = \frac{1}{2} \times EH \times AG$ et d'autre part que l'aire de EGO est $\mathcal{A}(AEG) = \frac{1}{2} \times EH \times GO$.
   Comme $AG = 2GO$ on en déduit : $\mathcal{A}(AOG) = 2\mathcal{A}(EGO)$.
   Finalement : $\mathcal{A}(AEG) = \frac{2}{3}\mathcal{A}(AEO) = \frac{2}{24}$ et$\mathcal{A}(EOG) = \frac{1}{3}\mathcal{A}(AEO) = \frac{1}{24}$.
3. • On a : $\mathcal{A}(DAG) = \mathcal{A}(AED) - \mathcal{A}(AGE)$.
   Calculons $\mathcal{A}(AED)$.
   Le triangle AED est rectangle en A donc $\mathcal{A}(AED) = \frac{1}{2} \times AE \times AD = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}$.
   Finalement : $\mathcal{A}(DAG) = \frac{1}{4} - \frac{2}{24} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.
   • $\mathcal{A}(OFDG) = \mathcal{A}(AEFD) - \mathcal{A}(DAG) - \mathcal{A}(AEO) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{5}{24}$.

2 Exercice

1.
$$\begin{aligned}
K(5294) &= 9542 - 2459 &&= 7083 \\
K(7083) &= 8730 - 378 &&= 8352 \\
K(8352) &= 8532 - 2358 &&= 6174 \\
K(6174) &= 7641 - 1467 &&= 6174 \\
\dots
\end{aligned}$$
   Donc l'algorithme appliqué au nombre 5294 conduit à l'entier $p = 6174$ pour lequel $K(6174) = 6174$.
2. (a) Puisque $0 < a < b < c$ on a :
$$K(m) = \overline{cba} - \overline{abc} = 100.(c - a) + a - c = (c - a).99$$
   Donc m est un multiple de 99.

(b) Le nombre $K(m)$ est un multiple de 99. Par construction c'est même $\alpha \times 99$ avec $2 < \alpha \leq 9$ en notant $\alpha = c - a$. Le nombre $K(m)$ et donc pris parmi :

$$\begin{aligned}
99 \times 2 &= 198 \\
99 \times 3 &= 297 \\
99 \times 4 &= 396 \\
99 \times 5 &= 495 \\
99 \times 6 &= 594 \\
99 \times 7 &= 693 \\
99 \times 8 &= 792 \\
99 \times 9 &= 871
\end{aligned}$$

Montrons que l'algorithme appliqué à chacun de ces nombres conduit à 495.
Pour 198 :

$$\begin{aligned}
K(198) &= 981 - 189 = 792 \\
K(792) &= 972 - 279 = 693 \\
K(693) &= 963 - 369 = 594 \\
K(594) &= 954 - 459 = 495
\end{aligned}$$

Pour 297 :

$$\begin{aligned}
K(297) &= 972 - 279 = 693 \\
K(693) &= 963 - 369 = 594 \\
K(594) &= 954 - 459 = 495
\end{aligned}$$

Pour 396 :

$$\begin{aligned}
K(396) &= 963 - 369 = 594 \\
K(594) &= 954 - 459 = 495
\end{aligned}$$

Pour 495 c'est immédiat.
Pour 594 :

$$K(594) = 954 - 459 = 495$$

Pour 693 :

$$\begin{aligned}
K(693) &= 963 - 369 = 594 \\
K(594) &= 954 - 459 = 495
\end{aligned}$$

Pour 792 :

$$\begin{aligned}
K(792) &= 972 - 279 = 693 \\
K(693) &= 963 - 369 = 594 \\
K(594) &= 954 - 459 = 495
\end{aligned}$$

Pour 871 :

$$\begin{aligned}
K(871) &= 871 - 178 = 693 \\
K(693) &= 963 - 369 = 594 \\
K(594) &= 954 - 459 = 495
\end{aligned}$$

Donc l'algorithme appliqué au nombre m conduit à 495 en cinq itérations au plus.

3 Exercice

1. Une réduction de 25% correspond à un coefficient multiplicateur de $\frac{3}{4}$.
   Si seuls deux des trois pantalons sont payés alors le coût d'un pantalon est $\frac{2}{3}$ du coût hors promotion.
   Or $\frac{3}{4} \geq \frac{2}{3}$, donc la réduction la plus importante est obtenue avec la promotion sur les pantalons.
   Le client a donc tord de vouloir utiliser sa carte de fidélité.

2. (a) Si les pantalons coûtent respectivement 2 et 2 et 1, alors on paye les pantalons au trois quart de leur prix avec la carte et au quatre cinquième avec la promotion sur les pantalons. Dans ce cas le client a intérêt à utiliser sa carte de fidélité.

   (b) Si les pantalons coûtent respectivement 100 et 101 et 102, alors on paye les pantalons au trois quart de leur prix avec la carte et à $\frac{201}{303} = \frac{67}{101}$ du prix d'origine avec la promotion sur les pantalons. Dans ce cas le client a intérêt à utiliser la promotion car $\frac{67}{101} \leq \frac{3}{4}$.

   (c) Le prix des pantalons avec la promotion est multiplier par : $\frac{p_2+p_3}{p_1+p_2+p_3}$. Avec la carte de fidélité le prix des pantalons est multiplié par $\frac{3}{4}$ donc pour que la carte de fidélité soit plus intéressante il faut que : $\frac{p_2+p_3}{p_1+p_2+p_3} \geq \frac{3}{4}$. Autrement dit : $p_2 + p_3 \geq 3p_1$.
   On vérifie aisément que cette condition est suffisante.
   Le client a intérêt à utiliser sa carte de fidélité si et seulement si $p_2 + p_3 \geq 3p_1$.