1 Exercice

1. - $1 = 7 \times 0 + 1$ avec $0 \leq 1 < 7$ donc A est le reste de la division euclidienne de 1 par 7.
   - $10 = 7 \times 1 + 3$ le reste est 3.
   - $100 = 7 \times 14 + 2$ le reste de la division euclidienne de 100 par 7 est 2.

   On a successivement :
   $10^3 = 10 \times (7 \times 14 + 2)$.
   $10^3 = 7 \times 140 + 2 \times 10$.
   $10^3 = 7 \times 140 + 2 \times (7 \times 1 + 3)$.
   $10^3 = 7 \times 140 + 7 \times 2 + 6$.
   $10^3 = 7 \times 142 + 6$.
   Comme $0 \leq 6 < 7$, le reste de la division euclidienne de 10^3 par 7 est 6.

   (b) $10^{n+1} = 10 \times 10^n$
   $10^{n+1} = 10 \times (7 \times q_n + r_n)$, en notant q_n et r_n respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de 10^n par 7.
   $10^{n+1} = 7 \times 10 \times q_n + 10r_n$
   $10^{n+1} = 7 \times 10 \times q_n + 7 \times r_n + 3 \times r_n$
   $10^{n+1} = 7 \times (10 \times q_n + r_n) + 3 \times r_n$
   Donc : $r_{n+1} \equiv 3r_n \mod 3$

   (c) Si $3r_n < 7$ alors $r_{n+1} = 3r_n$.
   Si $7 \leq 3r_n < 14$ alors $r_{n+1} = 3r_n - 7$.
   Si $14 \leq 3r_n < 21$ alors $r_{n+1} = 3r_n - 7$.
   ...

   (d)

10^n	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9
Reste	1	3	2	6	4	5	1	3	2	6

2. $6\ 000\ 000\ 006 = 6.10^9 + 6$.
   D'après le tableau de la question précédente : $10^9 \equiv 6 \mod 7$.
   Donc : $6.10^9 \equiv 6 \times 6 \mod 7$. C'est-à-dire : $6.10^9 \equiv 1 \mod 7$.
   Enfin : $6.10^9 + 6 \equiv 1 + 6 \mod 7$, ou encore : $6.10^9 + 6 \equiv 0 \mod 7$.
   Le reste de la division euclidienne de 6 000 000 006 est 0.
   Le nombre 6 000 000 006 est divisible par 7.

2 Exercice

1. Notons a, b et c les trois chiffres composant N : $N\overline{abc}$.
   D'après l'énoncé :
   $$\begin{cases} a.b.c = 120 \\ a + b + c = 16 \end{cases}$$

   - Si l'un des chiffres égale 0 leur produit est nul ce qui contredirait le fait que ce produit égale 120.

   - Si l'un des chiffres égale 1 le produit des deux autres égale 120 ce qui est impossible car le plus grand produit de deux chiffres est $9 \times 9 = 81$.

   - Si (par exemple) $a = 2$, alors le précédent système s'écrit :
     $$\begin{cases} b.c = 60 \\ b + c = 2 \end{cases}$$
     Autrement dit b et c sont les éventuelles racines du trinôme $x^2 - 14X + 60$. Or le discriminant

de ce trinôme est : $\Delta = 14^2 - 4 \times 60 < 0$, donc il n'a pas de racine réelle.
Si $a = 2$ il n'y a donc pas de solution.

2. Si N contient le chiffre 7, alors 7 est diviseur du produit abc. Autrement dit on devrait avoir 7 diviseur de 120. Ceci est absurde car 120 et 7 sont premiers entre eux.
De même si 3 est effectivement diviseur de 120, 3 n'est pas diviseur de $\frac{120}{3} = 40$, donc 9 n'est pas diviseur de 120.

3. $120 = 2^3.3.5$.
Les diviseurs de 120 sont $\{1, 2, 2^2, 2^3, 3, 5, 2.3, 2^2.3, 2^3.3, 2.5, 2^2.5, 2^3.5, 3.5, 2.3.5, 2^2.3.5, 2^3.3.5\}$.
Or d'après les questions précédentes a, b et c sont des diviseurs de 120 pris parmi $\{3, 4, 5, 6, 8\}$, donc a, b et c sont nécessairement dans $\{2^2, 2^3, 3, 5, 2.3\}$.

(1) Si $a = 2^2$, alors $bc = 2.3.5$. Comme b et c sont des chiffres nécessairement $b = 2.3$ et $c = 5$ ou en inversant les rôles de b et c.
(2) Si $a = 2^3$ alors $bc = 2.5$ et donc nécessairement $b = 3$ et $c = 5$ (quitte à intervertir b et c).
(3) Si $a = 2.3$ alors $bc = 2^2.5$. La seule possibilité pour que b et c soit des chiffres est que $b = 2^2$ et $c = 5$, mais ce cas a déjà été traité au (2).
(4) Si $a = 3$ ou $a = 5$ le cas a déjà été traité (en fait avec $b = 3$ et $c = 5$) au (2).

Finalement les chiffres composant N sont $4,\ 6$ et 5 ou $8,\ 3$ et 5. Comme de plus $a+b+c = 16$ nécessairement les chiffres de N sont $8,\ 3$ et 5.
Réciproquement 835 convient bien.

4. Toutes les solutions pour N sont nécessairement parmi les permutations circulaires sur les trois chiffres 8, 3 et 5 : 835, 853, 583, 538, 385 et 358.
On vérifie aisément que ces trois nombres conviennent bien.

3 Exercice

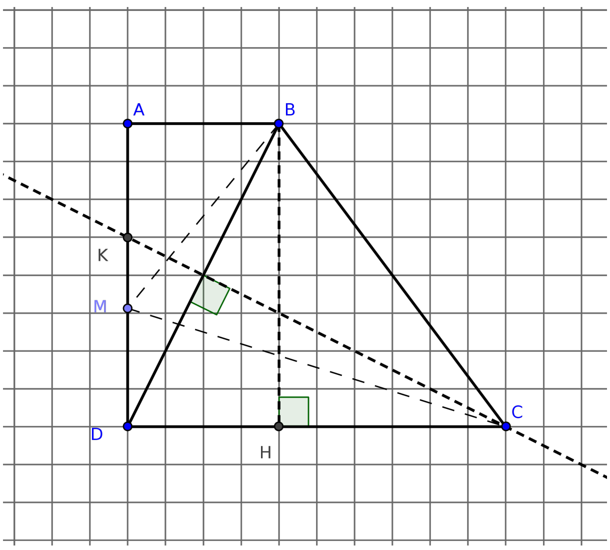

Figure 1 – Illustration de l'énoncé.

1. L'aire du trapèze $ABCD$ est : $\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2}(4+10) \times 8 = 42\text{cm}^2$.
2. Montrons que BCD est isocèle en C.
Notons H la projection orthogonale de B sur (AD). Calculons la longueur BC.
Puisque BCH est un triangle rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore : $HB^2 + HC^2 =$

BC^2. Donc, BC étant positive et comme $HB = AD$ et $HC = DC - AB$: $BC = \sqrt{6^2+8^2} =$ 10cm.
Donc $BC = CD$ et le triangle BCD est isocèle en C.

3. BCD est isocèle en C donc la hauteur issue de C est aussi une médiatrice. Donc D est l'image de B par la symétrie axiale par rapport à (KC) ; K et C sont leurs propres images par cette symétrie. Donc KDC est l'image de KBC par la symétrie axiale par rapport à (KC).
Les triangles KBC et KDC ont donc même aire.

4. (a) L'aire du triangle BCM est, avec des notations évidentes : $\mathcal{A}(BCM) = \mathcal{A}(ABCD) - \mathcal{A}(ABM) - \mathcal{A}(DCM)$.
   - On a déjà calculé $\mathcal{A}(ABCD) = 42\text{cm}^2$.
   - Le triangle AMB étant rectangle en A : $\mathcal{A}(ABM) = \frac{1}{2}AB \times AM = 2x$.
   - Le triangle DMC étant rectangle en D : $\mathcal{A}(DMC) = \frac{1}{2}DC \times DM = 5 \times (8-x)$.

   Donc : $\mathcal{A}(BCM) = 42 - 2x - 5(8-x) = 2 + 3x$

   (b) Supposons que la position de M est telle que : $\mathcal{A}(BMC) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(ABCD)$.
   On a donc : $2 + 3x = \frac{42}{2}$. On en déduit : $x = \frac{19}{3} = 6,333\ldots$ cm.