1 Exercice

1. (a) Montrons le avec l'outil vectoriel (possible avec le théorème de Thalès ou le théorème des milieux).
   $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, d'après la relation de Chasles.
   $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{BJ}$ puisque I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[BC]$.
   Donc, d'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{IJ}$.
   Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont donc colinéaires donc les droites (AC) et (IJ) sont parallèles.

   (b) De me on montre que : $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{LK}$. Donc : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$. Autrement dit $IJLK$ est un parallélogramme.

2. (a) A, C

   (b) A, B, C et D

3. Si $ABCD$ est un rectangle alors IBJ est rectangle en B donc, d'après le théorème de Pythagore : $IJ^2 = IB^2 + BJ^2 = \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 + \left(\frac{1}{2}BC\right)^2$.
   De même KDL est rectangle en D donc : $JK^2 = JC^2 + CK^2 = \left(\frac{1}{2}BC\right)^2 + \left(\frac{1}{2}CD\right)^2 = \left(\frac{1}{2}BC\right)^2 + \left(\frac{1}{2}AB\right)^2$, car $ABCD$ est un rectangle.
   Ainsi $IJ^2 = JK^2$. Le parallélogramme $IJKL$ est donc un losange.

4. (a) • Montrons que $IJKL$ est un carré.
   D'après la question précédente $IJKL$ est un losange.
   Montrons que $(I\hat{A}L)$ est un angle droit.
   Puisque $ABCD$ est un carré les triangles AIL et DKL sont isocèles rectangles. Donc les angles à la base mesure 45°. Par conséquent : $(I\hat{K}L) = 180° - (A\hat{L}I) - (D\hat{L}K) = 90°$.
   Autrement dit : $(I\hat{A}L)$ est droit.
   Donc $IJKL$ est un losange avec un angle droit donc c'est un carré.

   • Calculons l'aire, $\mathcal{A}$, de $IJKL$.
   $\mathcal{A} = IJ^2$.
   Or, d'après la question 3 : $IJ^2 = 2 \times \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 = \frac{1}{2}AB^2 = \frac{1}{2}a$.

   (b) Le quadrilatère $MNPQ$ est à $IJKL$ ce que $IJKL$ est à $ABCD$ donc l'aire de $MNPQ$ est : $\frac{a}{4}$.

2 Exercice

1. Pour chaque lettre de l'alphabet en dernière position sur la plaque il y a 999 nombres possible.
   Le numéro AA-999-AZ est celui du $26 \times 999 = 25974$-ème véhicule immatriculé.

2. Pour aller de AA-001-AA à AA-999-AZ il faut immatriculer 25974 véhicules, d'après la question précédente.
   Pour aller de AA-001-BA à AA-999-BC il faut immatriculer $3 \times 999 = 2997$ véhicules.
   Pour aller de AA-001-BD à AA-011-BD il faut immatriculer 11 véhicules.
   Donc au total pour aller AA-001-AA à AA-011-BD il faut immatriculer $25974 + 2997 + 11 = 28982$ véhicules.

3. Pour arriver au numéro AB-001-AA il faut avoir fait toutes les possibilités pour les cinq dernier caractères : $999 \times 26 \times 26 = 675324$.

4. Le nombre total de plaques possibles est : $26 \times 26 \times 999 \times 26 \times 26 = 456\ 519\ 024$.
   À raison de 7 millions de plaques par an le système de numérotation sera épuisé au bout de $\frac{456\ 519\ 024}{7.10^6} \simeq 65,22$ans.

3 Exercice

1. Puisque le revenu initial x a été réduit de 10%, on a : $x \times 0,90 = 50000$. Ainsi : $x = \frac{50000}{0{,}90} \simeq$ 55 556€.
2. Notons y le revenu annuel de Monsieur Durand. Le revenu annuel de Madame Durand est 85% de celui de Monsieur, il s'élève donc à : $0,85.x$.
   La somme des revenus égale 55 556, autrement dit : $55\ 556 = x + 0,85.x = 1,85.x$. On en déduit le revenu de Monsieur Durand : $x = \frac{55\ 556}{1{,}85} \simeq 30\ 030,30$€.
3. Le quotient familial du couple est : $QF = \frac{50000}{2} = 25000$. Donc l'impôt du couple est : $50000 \times 0,14 - 1277,03 \times 2 = 4545,94$€.
4. La part de revenu imposable sur l'augmentation est $0,90 \times 1000 = 900$€.Donc le quotient familial du couple serait $\frac{50900}{2} = 25450$€. Le couple changerait effectivement de tranche est l'impôt versé s'élèverait alors : $50900 \times 0,30 - 5308,23 \times 2 = 4653,54$€.
   Le montant supplémentaire d'impôt est donc : $4653,54 - 4545,94 = 107,60$€. Ainsi si le salaire de Monsieur Durand augmente de 1000€ il gagnera, après impôt, $1000 - 107,6 = 892,4$€.
   L'argument de Madame Durand n'est donc pas valable.