1 Exercice

1. Notons x le nombre de 1 utilisés et y le nombre de trois utilisés dans l'écriture du nombre. On a :
$$\begin{cases} x+y=5 \\ x+3.y=11 \end{cases}$$
Résolvons ce système par substitution : $x=5-y$. Donc : $5-y+3.y=11$. Ainsi : $y=\frac{11-5}{3-1}=3$. On en déduit : $x=5-3=2$.
Autrement dit nous cherchons des nombres de cinq chiffres avec deux 1 et trois 3. Recensons toutes les possibilités du plus petit au plus grand :

1	1	3	3	3
1	3	1	3	3
1	3	3	1	3
1	3	3	3	1
3	1	1	3	3
3	1	3	1	3
3	1	3	3	1
3	3	1	1	3
3	3	1	3	1
3	3	3	1	1

2. Notons a, b les chiffres composant le nombre. Puisque la somme des chiffres égale 11 :
$$\begin{cases} 0.a+5.b=11 & (1) \\ 1.a+4.b=11 & (2) \\ 2.a+3.b=11 & (3) \\ 3.a+2.b=11 & (4) \\ 4.a+1.b=11 & (5) \\ 5.a+0.b=11 & (6) \end{cases}$$
Du fait des rôles symétriques joués par a et b, les équations (4), (5) et (6) sont des redites des trois premières. Détaillons celles-ci :

Si (1) est vraie $5.b=11$ ce qui signifie que 5 divise 11. Or ceci est impossible puisqu'ils sont premiers entre eux, donc il n'y a pas de telle solution.

Si (2) est vraie $a+4.b=11$. Et donc : $4.b=11-a$, autrement dit 11-a est divisible par 4. Étudions tous les cas possibles. Si $a=0$ alors $4.b=11$ est impossible car 4 est premier à 11.

Si a =1 alors, $4.b=10$ est impossible car le PGCD de 4 et 10 est $4\wedge 10=2$.

Si a =2 alors, $4.b=9$ est impossible car le PGCD de 4 et 9 est $4\wedge 9=1$.

Si a =3 alors, $4.b=8$ et alors $b=2$ et donc $a=3$.

Si a =4 alors, $4.b=7$ est impossible car le PGCD de 4 et 7 est $4\wedge 7=1$.

Si a =5 alors, $4.b=6$ est impossible car le PGCD de 4 et 6 est $4\wedge 6=2$.

Si a =6 alors, $4.b=5$ est impossible car le PGCD de 4 et 5 est $4\wedge 5=1$.

Si a =7 alors, $4.b=4$ et alors $b=1$ et donc $a=7$.

Si a =8 alors, $4.b=3$ est impossible car $3\leq 4$.

Si a =9 alors, $4.b=2$ est impossible car $2\leq 4$.

Si a =10 alors, $4.b=1$ est impossible car $1\leq 4$.

Si (3) est vraie $3.b=11-2.a$. Donc $11-2.a$ est divisible par 3. Étudions tous les cas possibles. Si $a=0$ alors $3.b=11$ est impossible car le PGCD de 3 et 11 est $3\wedge 11=1$. De même :

Si a =1 alors, $3.b=9$ donc $b=3$ et $a=1$.

Si $a = 2$ alors, $3.b = 7$ est impossible car $3 \wedge 7 = 1$.
Si $a = 3$ alors, $3.b = 5$ est impossible car $3 \wedge 5 = 1$.
Si $a = 4$ alors, $3.b = 3$ donc $b = 1$ et $a = 4$.
Si $a = 5$ alors, $3.b = 1$ est impossible car $3 \geq 1$.

Finalement les couples d'entiers possibles sont : $\{(4;1),(1;3),(2;3),(1;7)\}$.

3. Étudions chaque couple.
   - $(4;1)$.
     Notons x le nombre de 1 utilisés et y le nombre de quatre utilisés dans l'écriture du nombre.
     On a :
     $$\begin{cases} x+y=5 \\ x+4.y=11 \end{cases}$$
     Donc : $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$
     Le nombre s'écrit avec deux 4. On choisi leur place parmi les 5 possibles il y a donc $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$ nombres possibles.
   - $(1;3)$.
     Ce cas a déjà été étudié à la question 1). Il y a 10 tels nombres.
   - $(2;3)$.
     Notons x le nombre de 2 utilisés et y le nombre de 3 utilisés dans l'écriture du nombre. On a :
     $$\begin{cases} x+y=5 \\ 2.x+3.y=11 \end{cases}$$
     On résout ce système en : $y = 1$ et $x = 4$. Il faut donc choisir une place parmi les 5 possibles pour le 3 dans l'écriture du nombre. Il y a donc $\binom{5}{1} = \frac{5!}{4!1!} = 5$ nombre possibles.
   - $(1;7)$.
     Notons x le nombre de 1 utilisés et y le nombre de 7 utilisés dans l'écriture du nombre. On a :
     $$\begin{cases} x+y=5 \\ x+7.y=11 \end{cases}$$
     Donc $y = 1$ et $x = 4$. Il faut donc choisir une place parmi les 5 possibles pour le 7 dans l'écriture du nombre. Il y a donc $\binom{5}{1} = \frac{5!}{4!1!} = 5$ nombre possibles.

   Au total le nombre de différents nombres que l'on peut écrire est : $\binom{5}{2} + \binom{5}{2} + \binom{5}{1} + \binom{5}{1} = 30$.

2 Exercice

1. a) En adoptant des notations évidentes : si S_V représente 35% de S et si S_J représente 25% de S alors S_R représente $100 - 35 - 25 = 40\%$ de S. Donc : $\frac{S_R}{S} \times 100 = 40$. On en déduit : $S = S_R \times \frac{100}{40} = 2688 \times \frac{100}{40} = 6720\text{cm}^2$.
   b) On en déduit le pourcentage de l'aire total que représente l'aire S : $\frac{S}{S_{totale}} \times 100 = \frac{6720}{120 \times 84} \times 100 \simeq 66,7\%$.
   c) $x = \frac{1}{8} \times AB = \frac{1}{8} \times 120 = 15\text{cm}$.
   Déterminons la surface hachurée : $S_h = 84 \times x + 120 \times y - x.y$.
   Or $S_h = 120 \times 84 - S = 3360\text{cm}^2$ donc $y = \frac{3360 - 84 \times 15}{120 - 15} = 20\text{cm}$.
2. $S_h = 84 \times x + 120 \times y - x.y = 84 \times 12 + 120 \times y - 12.y = 1008 - 108y$.
   Pour que l'aire hachurée soit entre 20 et 22% de la surface total il faut et il suffit que : $\frac{20}{100} \leq 100 \times \frac{1008 - 108.y}{10080} \leq \frac{22}{100}$.
   $\frac{20}{100} \times \frac{10080}{100} \leq 1008 - 108.y \leq \frac{22}{100} \times \frac{10080}{100}$
   $\frac{1}{108}\left(1008 - \frac{20}{100} \times \frac{10080}{100}\right) \geq y \geq \frac{1}{108}\left(1008 - \frac{22}{100} \times \frac{10080}{100}\right)$
   $9,15 > y > 9,12$
   Il n'y a donc aucune valeur entière de y (en centimètres) qui soit possible.

3 Exercice

1. a) Le triangle SOA étant rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore : $OA^2+OS^2 = AS^2$.
Déterminons OA.
OA est la demi-diagonale AC.
Le triangle ABC étant rectangle en B, car $ABCD$ est un carré, d'après le théorème de Pythagore : $AB^2 + BC^2 = AC^2$. Donc : $AC^2 = 2 \times 4^2 = 32$ et donc : $AC = 4\sqrt{2}$ puisque $AC \geq 0$. Ainsi : $OA^2 + OS^2 = AS^2 \Leftrightarrow (2\sqrt{2})^2 + 2^2 = AS^2$.
Donc : $AS^2 = 2^2.(1 + 2) = 2^2.3$. On en déduit la valeur exacte de AS puisqu'une longueur est positive : $AS = 2\sqrt{3}$cm.

   Puisque $ABCD$ est un carré $OA = OB$ et donc on montrerait de même que ci-dessus que $SB = 2\sqrt{3}$. Par conséquent le triangle SAB est isocèle en S.

   b)

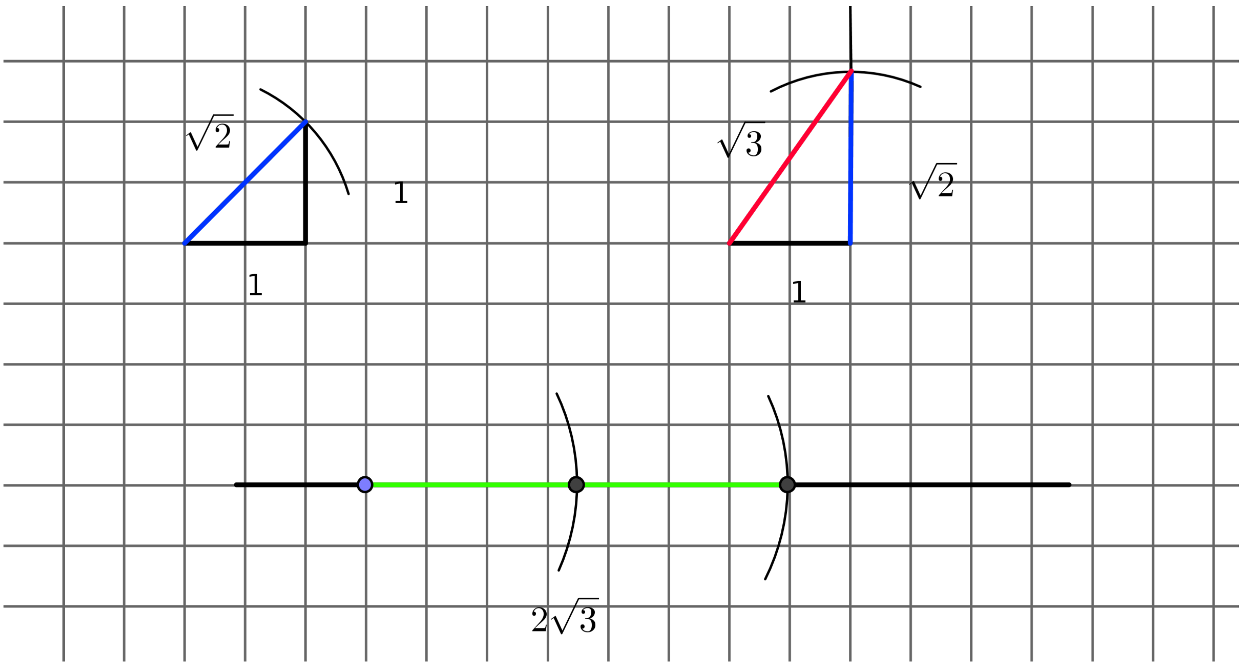

FIGURE 1 – Construction de $\sqrt{2}$ puis de $\sqrt{3}$.

2.

3. a) Le volume de la pyramide $SABCD$ est : $V_1 = \frac{1}{3} \times 4 \times 4 \times 2 = \frac{1}{3} \times 2^5$.
Le volume du solide construit est donc : $V = 4 \times \frac{1}{3} \times 2^5 + 4 \times 4 = 2^4(\frac{1}{3} \times 2^3 + 1) = 2^4 \times \frac{11}{3}$.

   b) (i) OJS est isocèle rectangle en O (car $OJ = \frac{1}{2} \times AB$ et $(S\widehat{O}J$ est droit) donc : $(S\widehat{J}O) = 45°$.
De même : $(S'\widehat{J}O') = 45°$.
Or $(O\widehat{J}O') = 90°$.
Donc : $(S\widehat{J}S') = 180°$.
$(S\widehat{J}S')$ est donc plat.

   (ii) $SBS'C$ est un quadrilatère plan convexe dont les quatre côtés ont même longueur ; $SBS'C$ est un losange.

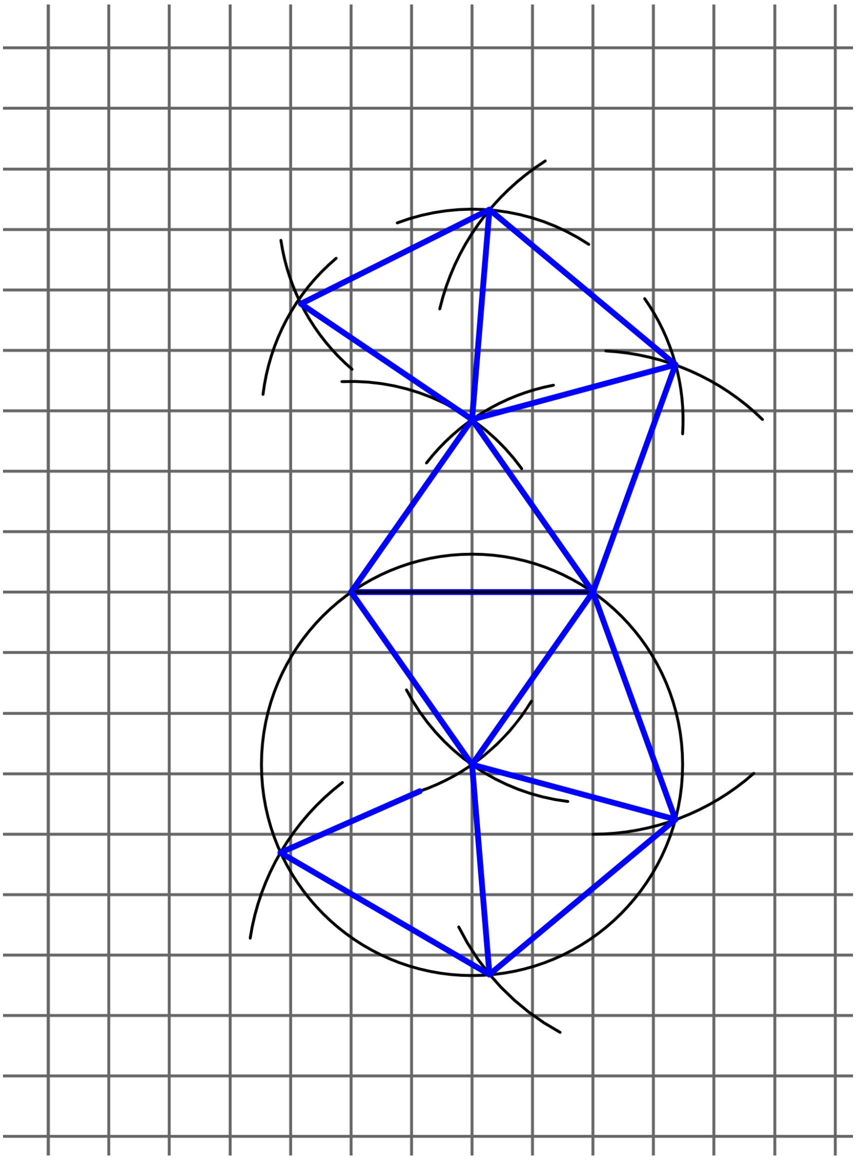

Figure 2 – Patron du solide.