1 Exercice

1. Les points E, H et T sont deux à deux distincts et alignés dans cet ordre.
   Les points E, O et J sont deux à deux distincts et alignés dans cet ordre.
   Les droites (EJ) et (ET) sont sécantes en E.
   On a donc une configuration de Thalès.
   Les droites (OH) et (TJ) sont toutes deux perpendiculaires à la droite (Δ). Donc sont parallèles ente elles.
   D'après le théorème de Thalès on a la relation métrique : $\frac{EA}{ET} = \frac{EO}{EJ} = \frac{OH}{TJ}$.
   Or $EO = 3.r$, $EJ = 5.r$, et $TJ = r$, donc $\frac{OH}{r} = \frac{3.r}{5.r}$. Et enfin : $a = OH = \frac{3}{5}.r$.
2. $$\left\{\begin{array}{c} \frac{3}{5} \in \mathbb{Q} \\ a \in \mathbb{N}^* \subseteq \mathbb{Q} \\ (\mathbb{Q}, +, .) \text{ est un anneau} \end{array}\right. \Rightarrow a = \frac{3}{5}.r \in \mathbb{Q}$$
3. $a = \frac{3}{5}r \Rightarrow a = \frac{6.r}{10}$
   $\exists (n, p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N},\ a = n.10^p \Leftrightarrow a \in \mathbb{D}$
   en notant $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux.
4. $$\left\{\begin{array}{l} 3 \wedge 5 = 1 \\ \frac{3}{4}.r \in \mathbb{N}* \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} 5|r \\ r \in \mathbb{N}^* \end{array}\right. \Rightarrow r \in \{5.n | n \in \mathbb{N}^*\}$$
5. Si a est premier alors en particulier c'est un entier et donc d'après la question précédente r est multiple positif non nul de 5.
   Soit $m.5 = r$, avec $m \in \mathbb{N}$ un tel multiple.
   Alors $a = 3.m$ et donc a est premier si et seulement si $m = 1$. Autrement dit a est premier si et seulement si $r = 5$ et alors $a = 3$.
6. En arguant du théorème de Pythagore :
   $$\left\{\begin{array}{c} (OH)\perp(HB) \\ OH = a = \frac{3}{5}.r \\ OB = r \end{array}\right. \Rightarrow HB^{+}\frac{9}{25}.r^2 = r^2$$
   Autrement dit : $HB^2 = \frac{16}{25}.r^2$. Et puisque HB est une quantité positive : $HB = \frac{4}{5}.r$
7. On utilise le théorème de Pythagore appliqué au triangle AHO rectangle de H et on obtient le même résultat qu'à la question précédente.
   On en déduit : $b = 2.a = \frac{8}{5}.r$.
8. $5 \wedge 2 = 1 \Rightarrow 5 \wedge 2^3 = 1$
   Donc si b est un entier nécessairement r est un multiple de 5 :
   $\exists m \in \mathbb{N},\ b = 2^3.5.m$
   Donc : $2^3|b$ et par conséquent b n'est pas premier.

2 Exercice

1. a) On dit qu'on a une division euclidienne de $a \in \mathbb{Z}$ par $b \in \mathbb{N}^*$ lorsque l'on a trouvé l'unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :
   $$\left\{\begin{array}{l} a = b.q + r \\ 0 \leq r < b \end{array}\right.$$
   Dans la division euclidienne de 57148468 par 17 :
   - dividende 57148468
   - diviseur 17
   - quotient 3361674

- reste 10

b) Dans la division euclidienne de 84279733 par 17 :

- dividende 84279733
- diviseur 17
- quotient 4957630+1=4957631
- reste 23-17=6

c) En sommant les égalités des deux questions précédentes $57148468 + 84279733 = (3361674 + 4957631).17 + 10 + 6 = (3361674 + 4957631).17 + 16$. Puisque 16<17 on peut affirmer que dans ce cas le quotient est 3361674+4957631 et le reste 16.
$57148468 \times 2 = 3361674 \times 2 \times 17 + 10 \times 2 = (3361674 \times 2 + 1).17 + 3$. Puisque 3<17 on peut affirmer que dans ce cas le quotient est $3361674 \times 2 + 1$ et le reste 3.

2. a) $a + a' = (q + q').17 + r + r'$
$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r < 17 \\ 0 \leq r' < 17 \end{array} \right. \Rightarrow 0 \leq r + r' < 34$
On distingue deux cas :

•Si $r + r' < 17$ alors le quotient est la somme des quotients et le reste est la somme des restes.

•Si $17 \leq r + r' < 34$, alors le quotient est la somme des quotients plus 1 et le reste est la somme des restes moins 17.

b) $2a = (2.q).17 + 2.r$
$0 \leq r < 17 \Rightarrow 0 \leq 2.r < 34$
On distingue deux cas :

•Si $2.r < 17$ alors le quotient est le double du quotient et le reste est le double du restes.

•Si $17 \leq r + r' < 34$, alors le quotient est le double du quotient plus 1 et le reste est le double du reste moins 17.

3 Exercice

1. Si on note $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ les droites parallèles à (L) et située de part et d'autre de (L) à cinq cents mètres, alors le trésor se trouve soit dans le demi-plan délimité par $\mathcal{D}$ et ne contenant pas (L) soit dans le demi-plan délimité par $\mathcal{D}'$ et ne contenant pas (L).
2. Le trésor se trouve à l'extérieur du disque de centre E et de rayon huit cents mètres.
3. Le trésor se trouve à l'intérieur du disque de centre B et de rayon trois cents mètres.
4. Le trésor est sur la médiatrice du segment $[SP]$.
5.

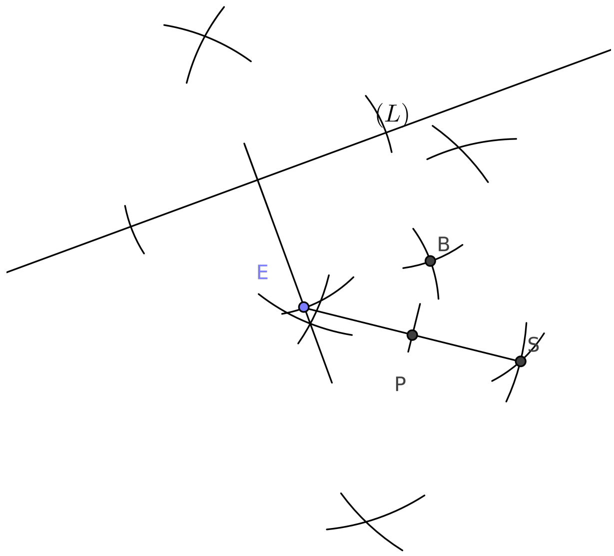

FIGURE 1 – Tracé à la règle et au compas.

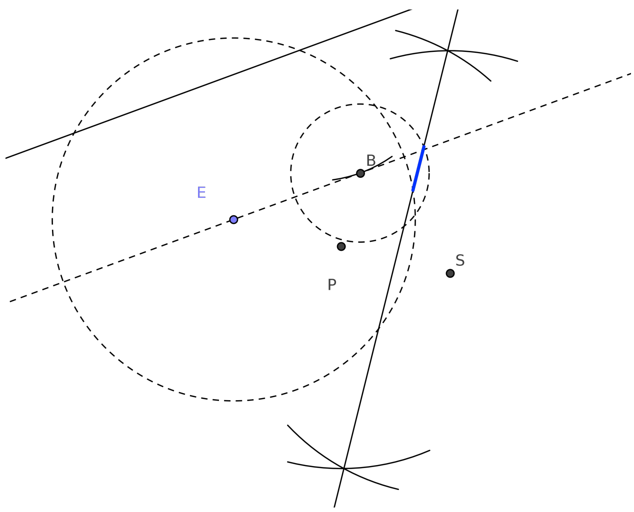

FIGURE 2 – Positions possibles du trésor en bleu.