1 Exercice

1. $\begin{cases} \text{Divieurs de } 6,\ 1,2,3 \\ 6 = 1+2+3 \end{cases}$ et $\begin{cases} \text{Divieurs de } 496,\ 1,2,4,8,16,31,62,124,248 \\ 496 = 1+2+4+8+16+31+62+124+248 \end{cases}$
2. $\begin{cases} \text{Divieurs de } 120 :\ 1,2,4,8,3,6,12,24,5,10,20,40,15,30,60 \\ 1+2+4+8+3+6+12+24+5+10+20+40+15+30+60 = 240 \end{cases}$
   Donc 120 n'est pas parfait.
3. a) Si $n = 1$, alors $N = 2.(2^2 - 1) = 6$ et $2^2 - 1 = 3$ est premier.
   Si $n = 2$, alors $N = 2^2.(2^3 - 1) = 28$ et $2^3 - 1 = 7$ est premier.
   Si $n = 3$, alors $N = 2^3.(2^4 - 1) = 120$ mais $2^4 - 1 = 15 = 3.5$ n'est pas premier.
   Si $n = 4$, alors $N = 2^4.(2^5 - 1) = 496$ et $2^4 - 1 = 31$ est premier.
   On retrouve les résultats des questions précédentes.

   b) $2^6 - 1 = 63 = 7.9$ n'est pas premier. $2^7 - 1 = 127$ est premier d'après l'énoncé. Donc le plus petit nombre parfait paire supérieur à 496 est $2^6.(2^7 - 1) = 8128$.

2 Exercice

1.

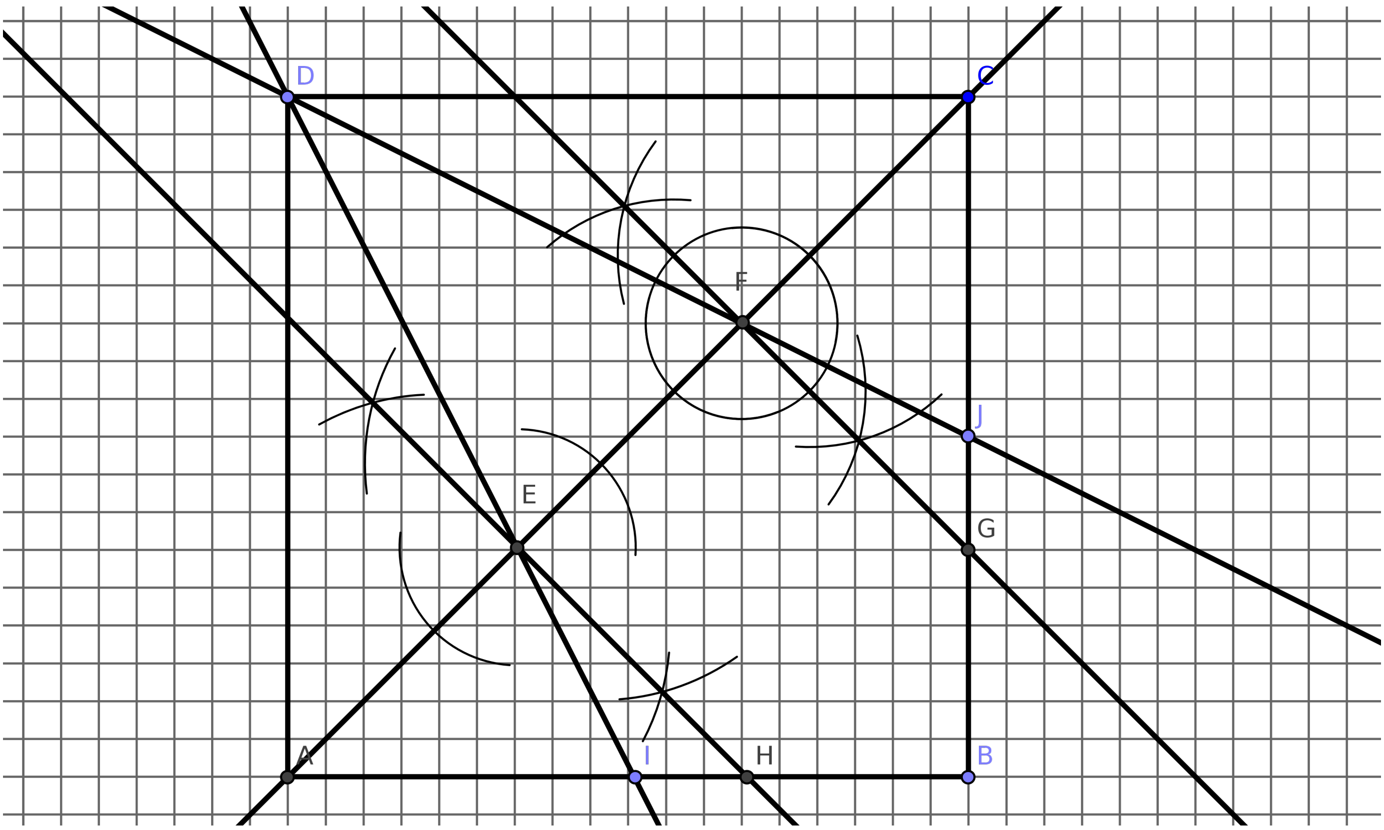

Figure 1 – Construction.

2. a) • Dans un carré les diagonales se coupent à angle droit. Donc (AC) est la hauteur de ABD issue de A.
   Puisque $ABCD$ est un carré ABD est isocèle rectangle en A. Donc (AD) est non seulement la hauteur mais aussi la médiane de ABD issue de A.
   • Puisque I est le milieu de $[AB]$, (DI) est la médiane de ABD issue de D.
   On en déduit que E oint d'intersection de deux médiane de ABD est le centre de gravité de ce triangle.

Puisque E est le centre de gravité il est au deux tiers de la médiane en partant du sommet : $\frac{AE}{AO} = \frac{2}{3}$.
Puisque A, E, O et C sont alignés dans cet ordre : $\frac{AE}{AC} = \frac{AE}{2 \times AO} = \frac{1}{2} \times \frac{AE}{AO} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

b) Le triangle ABC est rectangle en B. Donc d'après le théorème de Pythagore on a : $AB^2 + BC^2 = AC^2$. Comme le triangle ABC est isocèle en B : $2AB^2 = AC^2$. Donc : $AC^2 = 2 \times 9^2$. Comme $AC \geq 0$, $AC = 9\sqrt{2}$.
Or $AE = \frac{1}{3} \times AC$, donc $AE = 3\sqrt{2}$.

c) Le triangle AEH est isocèle rectangle en E. En effet l'angle $(\widehat{AEH})$ est droit par construction. L'angle $(\widehat{HAE})$ est la moitié d'un angle droit puisque ABD étant isocèle rectangle en A, (AC) est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$. Comme la somme ds angles d'un triangle égale l'angle plat, nécessairement $(\widehat{EHA})$ mesure 45^{circ}.
Puisque le triangle AEH est isocèle rectangle en E, $AE = EH$ et donc $EH = 3\sqrt{2}$.

d) En notant $s_{(DB)}$ la symétrie par rapport à l'axe (DB), on a $\begin{cases} s_{(DB)}(E) = F \\ s_{(DB)}(H) = G \end{cases}$
La symétrie étant une isométrie : $EF = FG = FC = 3\sqrt{2}$.
Donc : $EF = 9\sqrt{2} - 2 \times 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

e) $EFGH$ est un quadrilatère ayant trois angles droits. C'est donc un trapèze rectangle. Comme de plus il a trois côtés de même longueur c'est un carré.

3. a) Si l'isométrie se fait sans rotation du carré il est clair que toute tentative de pavage fera apparaître des triangles impossible à recouvrir avec un carré. Si on s'autorise une rotation de façon que les carrés soient orientés de la même façon le fait que la mesures des côtés de l'un soit rationnelle et l'autre irrationnelle garantie qu'on ne pourra jamais paver l'un par l'autre.

b) Par la symétrie d'axe (HG) on voit que l'on peut paver un carré de côté 3cm. On peut alors aisément paver tout le carré $ABCD$ avec ce dernier carré.

3 Exercice

1. a) Les 15 litres de vins coûtent au litre : $\frac{10 \times 75 + 5 \times 60}{10 + 5} = 70$ centimes.

b) Il y a $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ de vin à 70 centimes et $\frac{1}{3}$ de vin à 60 centimes.

2.

On devra mélanger les viens dans la proportion de 3 volumes de vin à 80 centimes pour 7

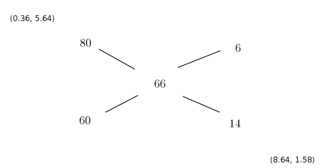

Figure 2 – Schématisation du mélange.

volumes de vin à 60 centimes.

3. a)

La maîtresse a acheté $\frac{2}{5}$ d'album à 13€ et que donc elle a acheté 6 albums à 13€ et 9 albums à 8€.

b) x et y vérifient :
$\begin{cases} x + y = 15 \\ 13x + 8y = 150 \end{cases}$

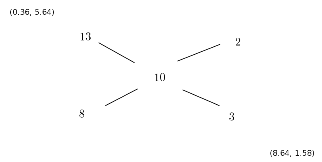

FIGURE 3 – Schématisation du mélange.

En utilisant une méthode par substitution : $y = 15 - x$, donc $13x + 8.(15 - x) = 150$. On en déduit $x = \frac{150-8.15}{5} = 6$. Puis on en déduit $y = 15 - 6 = 9$.

c)
- $M4 = 8 * M1 + 2 * A4$.
- Il est inutile d'aller au-delà de la colonne V car la maîtresse achète 15 albums. Il est inutile d'aller au-delà de la ligne 14 car les sommes qu'elle indique sont déjà toutes supérieures à 150€.
- La seule solution est la cellule $L8$. Autrement dit 6 livres à 13€ et 9 livres à 8€.