1 Exercice

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$.
   $2n+1+2n+3+2n+5 = 3 \times 2n+9$
   Donc : $\begin{cases} 2n+1+2n+3+2n+5 = 3.(2n+3) \\ 2n+1+2n+3+2n+5 = 6.(n+1)+3 \end{cases}$
   Donc en particulier :
   - $5+7+9 = 3 \times 7 = 6 \times 3+3$, et donc le reste de la division euclidienne de $5+6+7$ par 3 (resp. 6) est 0 (resp. 3).
   - $15+17+19 = 3 \times 17 = 6 \times 8+3$, et donc le reste de la division euclidienne de $15+16+17$ par 3 (resp. 6) est 0 (resp. 3).
   - $1527+1529+1531 = 3 \times 1529 = 6 \times 764$, et donc le reste de la division euclidienne de $1527+1529+1531$ par 3 (resp. 6) est 0 (resp. 3).
2. D'après le résultat obtenu au début de la question précédente le reste de la division euclidienne de la somme de trois entiers impairs consécutifs par 3 (resp. 6) est 0 (resp. 3).
3. $12027 = 3 \times 4009 = 3.(2 \times 2003+3)$. On vérifie alors aisément que : $2 \times 2003+1+2 \times 2003+3+2 \times 2003+5 = 12027$. Autrement dit : $4007+4009+40011 = 12027$.
4. On suppose que l'énoncé parle de p entier naturel non nul. De plus p désignant le nombre de termes d'une somme pour que cela ne soit pas trivial supposons $p \geq 2$
   Si $p=2$ alors $S_{1,2} = 12$ n'est pas divisible par 5.
   Si $p=3$ alors $S_{1,3} = 21$ n'est pas divisible par 5.
   Si $p=4$ alors $S_{1,4} = 32$ n'est pas divisible par 5.
   Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$.
   La somme des p entiers impairs consécutifs à partir de $2n+1$ est $S_{n,p} = \sum_{k=0}^{p} 2n+1+2k = p.(2n+1)+2\sum_{k=0}^{p} k = p.(2n+1)+2 \times \frac{p(p+1)}{2} = p.(2n+p+2)$.
   Ainsi si $p=5$ alors la somme de p nombres impairs consécutifs est divisible par 5.
   Ainsi $S_{n,p}$ est divisible par 5 pour $p=5$ mais pour aucun entier plus petit donc : la plus petite valeur possible de p est 5.

2 Exercice

1. - Montrons que $BKDI$ est u parallélogramme.
     Puisque $ABCD$ est un parallélogramme : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
     Comme de plus I (resp. K) est le milieu de $[AB]$ (resp. $[CD]$) : $2\overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{DK}$.
     Donc : $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{DK}$.
     On en déduit que le quadrilatère $IBKD$ est un parallélogramme.
   - $IB = DK = \|\frac{1}{2} overrightarrowAB\| = \frac{1}{2}a.$
   - Calculons la longueur ID.
     AID est rectangle en A. Donc d'après le théorème de Pythagore on a la relation métrique : $AI^2+AD^2 = ID^2$.
     Or $AI = \frac{1}{2}a$ et $AD = a$ donc : $ID^2 = \frac{5}{4}a^2$. Et puisque DI est positive : $DI = \frac{\sqrt{5}}{2}a$.
2. a) - Montrons que $FG = AF$.
     Les points A, F, G d'une part et A, I, B d'autre part sont alignés dans cet ordre est distincts deux à deux. On a donc une configuration de Thalès.
     Comme $EFGH$ est un carré $(EF)//(GH)$. Autrement dit : $(FI)//(GB)$.
     D'après le théorème de Thalès on a donc : $\frac{AF}{AG} = \frac{AI}{AB}\frac{1}{2}$. Donc : $AF = FG$.
   - ABG est rectangle en G donc, d'après le théorème de Pythagore : $AB^2 = AG^2+BG^2$.
     Or $AG = 2FG$ et $AB = a$ donc : $a^2 = 4FG^2+BG^2$ (E_1).
     BGJ est rectangle en G donc, d'après le théorème de Pythagore : $BJ^2 = BG^2+GJ^2$. Or

$BJ = frac12a$ et $GJ = AJ - AF = \frac{\sqrt{5}}{2}a - 2 \times FG$ donc : $\frac{1}{4}a^2 = BG^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}a - 2 \times FG\right)^2$ (E_2).

En soustrayant terme à terme (E_1) et (E_2) : $a^2 - \frac{1}{4}a^2 = 4 \times FG^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}a - 2 \times FG\right)^2$. Avec une identité remarquable : $\frac{3}{4}a^2 = 4 \times FG^2 - \left(\frac{5}{4}a^2 - 2\sqrt{5}a \times FG + 4FG^2\right)$. En simplifiant : $2\sqrt{5}a \times FG = 2a^2$. Ou encore : $FG = \frac{\sqrt{5}}{5}a$.

- Comme $AJ = \frac{\sqrt{5}}{2}a = \frac{5}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{5}a = \frac{5}{2}FG$. Autrement dit : $AJ = \frac{5}{2}FG$.

b) Calculons $\frac{FG}{AB}$.
$\frac{FG}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}a}{a} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.
Calculons le rapport des aires des carrés.
$\frac{\mathcal{A}(EFGH)}{\mathcal{A}(ABCD)} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{1}{5}$.

3. a)
   - $EFGH$ est un carré donc EF et GB sont parallèles.
   - $EF = \frac{2}{5} \times AJ = BG$, par symétries ou en reprenant les démonstrations précédentes.
   - Donc $EFBG$ est un parallélogramme et ses diagonales se coupent en leur milieu. Donc nécessairement le milieu M de $[FG]$ appartient à $[EB]$.

   b) En traçant les droites $(EB), (FC), (GD), (HA)$ on fait apparaître les milieux respectivement de $[FG]$, $[GH]$, $[HE]$, $[EF]$. On peut alors aisément recommencer une construction similaire à celle effectuée au début de l'énoncé.

   c) $PQ = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times a = \frac{4}{25}a$.

3 Exercice

1. Notons x la troisième longueur en dm (car $1L = 1\text{dm}^3$) : $x = \frac{1}{1{,}9 \times 0{,}94}$. Une valeur approchée de x au millimètre près par excès et : $x \simeq 56\text{mm}$.
2. a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$ la longueur d'un côté de la base carrée. On a : $x^2 = \frac{1}{2} = 0.5$. Comme $x \geq 0$, nécessairement $x = \sqrt{5}$. Une valeur approchée au millimètre près par excès : $x \simeq 0,71\text{dm}$.

   b) S'il contient 20% de jus en plus alors il contient 1,2L. Donc en dm : $x = \sqrt{\frac{1{,}2}{2}}$.
3. $1\text{dm}^3 = 1000\text{cm}^3$. Donc si on note a, b et c les dimensions entières de la boîte : $abc = 1000 = 10^3 = 2^3.5^3$. Comme a, b et c sont entiers nécessairement ce sont des produits des facteurs 2 et 3 à l'ordre 3 au maximum. De plus leur rôle sont parfaitement symétriques et les cas symétriques sont à exclure. En utilisant le fait que a, b, c sont plus grands que 3 il ne reste que :
$2^3.3^3 = 2.5 \times 2.5 \times 2.5$
$2^3.3^3 = 2^2 \times 2.5 \times 5^2$
$2^3.3^3 = 2^2 \times 2.5^2 \times 5$
$2^3.3^3 = 2^3 \times 5 \times 5^2$

4. on utilise les données de la question précédente :

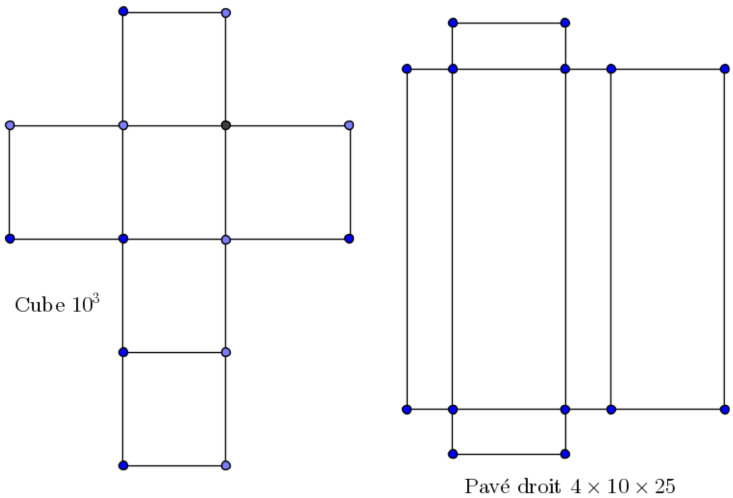

FIGURE 1 – Deux patrons possibles.