1 Exercice

1. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que : $n + (n+1) + (n+2) = 207$ (E1). Alors nécessairement : (E1) $\Leftrightarrow n = 68$.
   Réciproquement, si $n = 68$ il est clair que $n + (n+1) + (n+2) = 207$.
   Il existe donc un unique triplet de nombres entiers consécutifs dont la somme est 207.
2. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que : $n + (n+1) + (n+2) = 329$ (E2). Alors nécessairement : (E2) $\Leftrightarrow n = \frac{326}{3}$. Comme 3 ne divise pas 3+2+6, $\frac{326}{3} \notin \mathbb{Z}$.
   Il n'existe donc aucun triplet de nombres entiers consécutifs dont la somme est 326.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. $n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1)$. On en déduit une caractérisation des entiers, m, qui sont la somme de trois entiers naturels consécutifs : $\left\{ \begin{array}{c} 3|m \\ m \geq 3 \end{array} \right.$
   Par conditions nécessaire puis suffisante triviales on montre que cette propriété caractérise bien les entiers sommes de trois entiers naturels consécutifs.
4. D'après la question précédente $\overline{47d5}$ est nécessairement divisible par 3. Or $\overline{47d5}$ est divisible par 3 si et seulement si $4 + 7 + d + 5 = 16 + d$ est divisible par trois. Ce qui n'est vrai que pour $d \in \{2; 5; 8\}$.
   On vérifie de façon calculatoire que, réciproquement :
   $$\left\{ \begin{array}{c} 4725 = 1574 + 1575 + 1576 \\ 47255 = 1584 + 1585 + 1586 \\ 4785 = 1594 + 1595 + 1596 \end{array} \right.$$
   $\overline{47d5}$ est somme de trois entiers naturels consécutifs si et seulement si $d \in \{2; 5; 8\}$.

2 Exercice

1.

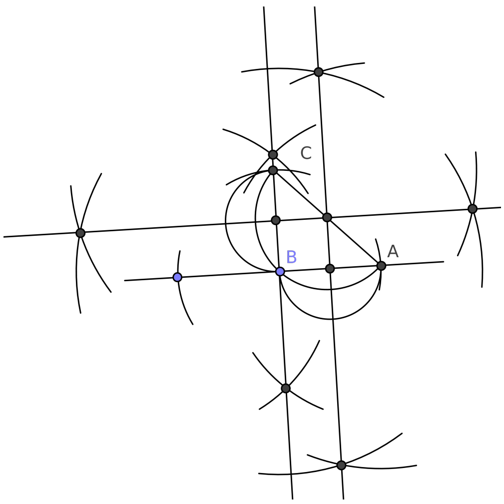

Figure 1 – Reproduction triangle et lunules.

2. L'aire des lunules s'obtient comme la somme des aires des demi-cercle de diamètre $[BC]$ et $[BA]$ et du triangle ABC à laquelle on soustrait l'aire du demi-cercle de diamètre $[AC]$.

   Calculons $\mathcal{A}(\mathcal{C}_1)$ l'aire du demi-cercle de diamètre $[AB]$.
   $\mathcal{A}(\mathcal{C}_1) = \frac{1}{2} \times \pi \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \pi \frac{49}{8}$

Calculons $\mathcal{A}(\mathcal{C}_2)$ l'aire du demi-cercle de diamètre $[BC]$.
Puisque ABC est rectangle en B d'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = BC^2 + AB^2$. Comme ABC est isocèle en B : $AC^2 = 2BC^2$. Donc : $BC = \sqrt{\frac{1}{2} \times 49} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 7$. Donc $\mathcal{A}(\mathcal{C}_2) = \frac{1}{2} \times \pi \times \frac{49}{2} = \pi\frac{49}{8}$.
Le troisième demi-cercle a même aire.

Calculons $\mathcal{A}(ABC)$.
$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} \times BA \times BC$
$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 49$
$\mathcal{A}(ABC) = \frac{49}{4}$.

Donc l'aire des lunules est : $\mathcal{A}(l) = \mathcal{A}(ABC) = \frac{49}{4}$. Donc au millimètre carré près : $\mathcal{A}(l) \simeq 12,250$.

3 Exercice

1. a) (IK), (JL), (AC) et (DB).
   b) BIP.
2. a) AIL est isocèle rectangle en A. L'angle est droit car $ABCD$ est un carré. $AI = AL$ car ce sont des moitiés de côtés d'un carré.
   b) Le triangle ALI est rectangle en A donc ,d'après le théorème de Pythagore : $AL^2 + AI^2 = LI^2$. Or : $AL = AI = \frac{1}{2}AB = 3$cm, donc $LI^2 = 18$. Nécessairement (seule valeur positive) : $LI = 3\sqrt{2}$.
   On en déduit : $LM = \frac{1}{3}LI = \sqrt{2}$cm.
   c) Du fait des symétries remarquées à la question 1) a) (ou en recommençant le même travail qu'à la question précédente) on voit que $IJ = JK = KL = LI = \sqrt{2}$. $IJKL$ est donc un losange.
   On peut remarquer $\widehat{DLA}$ est un angle de 180°. En tant qu'angle à la base d'un triangle isocèle rectangle : $\widehat{DLK} = \widehat{ILA} = 45°$. Donc $\widehat{KLI}$ est un angle droit.
   Ainsi $IJKL$ est un losange avec un angle droit ; autrement dit c'est un carré.
3. Cela faciliterait le tracé puisque les segments LM, MN et NI seraient alors des diagonales (de longueur $\sqrt{2}$) des carreaux du quadrillage.
4. Avec les notations évidentes on a d'une part :
   $\mathcal{A}(ABCD) = 6^2 = 36$
   et d'autre part :
   $\mathcal{A}(IJKL) = \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18$.
   On a donc bien : $\mathcal{A}(ABCD) = 2 \times \mathcal{A}(IJKL)$.
5. Les trois triangles considérés ont la droite OA pour hauteur commune issue de A. De plus le côté opposé à A dans ces trois triangles égale $\sqrt{2}$. Ayant même base et même hauteur ces triangles ont même aire.

4 Exercice

1. 18
2. Cinq graduations supérieures correspondent à deux graduations inférieures. Procédons à la divisions euclidienne : $2007 = 401 \times 5 + 2$. Comme le 2 de la graduation supérieure correspond à 14 de la graduation inférieure, 2007 correspond à $14 + 401 \times 2 = 816$.

3. On recul de cinq en cinq sur l'axe du haut :

Graduation inférieure	14	12	10	8	6	4	2	0
Graduation supérieure	2	-3	-8	-13	-18	-23	-28	-33

4. En lisant sur l'axe : $(x, y) \in \{(2; 14), (12; 18)\}$. Donc a et b vérifient le système :
$$\begin{cases} 2 = a \times 14 + b \\ 12 = a \times 18 + b \end{cases}$$
En soustrayant les égalités membres à membres : $4a = 10$ et donc $a = \frac{5}{2}$. On en déduit b en substituant a par cette valeur dans l'une des équations : $b = -33$.