Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche

Session 2007

MAT-07-PG4
Repère à reporter sur la copie

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS DES ECOLES

Vendredi 04 mai 2007 - de 8h 30 à 11h 30

Deuxième épreuve d'admissibilité

MATHÉMATIQUES	**Durée : 3 heures** **Coefficient : 3** **Note éliminatoire 5/20**

Rappel de la notation :

Il est tenu compte, à hauteur de **trois points** maximum, de la qualité orthographique de la production des candidats.

Ce sujet contient 9 pages, numérotées de 1/9 à 9/9. Assurez-vous que cet exemplaire est complet.
S'il est incomplet, demandez un autre exemplaire au chef de salle.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout document et de tout matériel électronique est rigoureusement interdit.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

N.B : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, ne comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine etc.

Tout manquement à cette règle entraîne l'élimination du candidat.

Si vous estimez que le texte du sujet, de ses questions ou de ses annexes comporte une erreur, signalez lisiblement votre remarque dans votre copie et poursuivez l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

Exercice 1 (4 points)

Un nombre entier naturel N est dit parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs positifs autres que lui-même.
Par exemple, 28 est un nombre parfait. En effet les diviseurs de 28 sont 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 14 ; 28 et 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28.
1) Montrer que 6 et 496 sont des nombres parfaits.
2) 120 est-il un nombre parfait ? Justifier votre réponse.
3) On admet qu'un nombre entier pair N est parfait si et seulement si il est de la forme :
$N = 2^n\ (2^{n+1} - 1)$, n étant un entier supérieur ou égal à 1 tel que $(2^{n+1} - 1)$ soit un nombre premier.
a) Appliquer la formule pour n compris entre 1 et 4. Quels résultats retrouve-t-on ?
b) On donne ci- dessous la liste des nombres premiers compris entre 100 et 150.
En utilisant la propriété ci-dessus, déterminer le plus petit nombre parfait pair supérieur au nombre 496.

Nombres premiers compris entre 100 et 150 :
101 ; 103 ; 107 ;109 ; 113 ;127 ;131 ;137 ;139 ;149

Exercice 2 (4 points)

Soit ABCD un carré de centre O et de côté 9 cm.
On note I et J les milieux respectifs des côtés [AB] et [BC], puis E et F les points d'intersection de la droite (AC) avec respectivement les droites (DI) et (DJ). La perpendiculaire en E à la droite (AC) coupe (AB) en H ; la perpendiculaire en F à la droite (AC) coupe (BC) en G.
On considère alors le quadrilatère EFGH.

1. **Construction**

   Tracer le carré ABCD et les points I et J en vous aidant du quadrillage de la copie (un carreau de la copie correspond à une longueur de 5 mm).

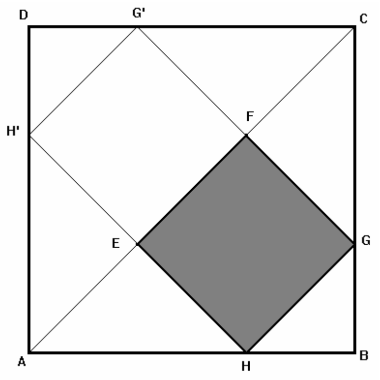
   Compléter la figure par une construction à la règle et au compas. On laissera apparents les traits de construction.

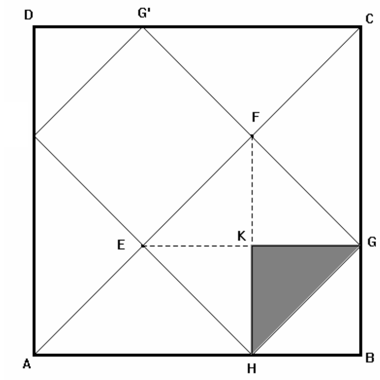
2. **L'objectif de cette question est de prouver que EFGH est un carré.**
   a. Montrer que le point E est le centre de gravité du triangle ABD.
   En déduire la valeur du rapport $\frac{AE}{AO}$ puis prouver que $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{3}$.
   b. Montrer que $AE = 3\sqrt{2}$ cm.
   c. Quelle est la nature du triangle AEH ? Justifier la réponse.
   En déduire que $EH = 3\sqrt{2}$ cm.
   d. On rappelle qu'une diagonale d'un carré est un axe de symétrie de ce carré.
   Indiquer sans justification les symétriques respectifs des points E et H par rapport à l'axe (DB). En déduire les longueurs FG, FC puis la longueur EF.
   e. Conclure sur la nature du quadrilatère EFGH. Justifier la réponse.

3. Recherche d'un pavage commun aux carrés ABCD et EFGH

On rappelle que le pavage d'une surface est l'action de couverture totale et sans superposition de cette surface par un nombre entier de « pièces » isométriques.

Les figures ci-dessous correspondent aux carrés ABCD et EFGH construits dans la question 1.





a. Peut-on paver le carré ABCD à l'aide de carrés isométriques au carré EFGH ? Justifier la réponse.
b. Peut-on paver les carrés EFGH et ABCD à l'aide de triangles isométriques au triangle GHK où K désigne le centre du carré EFGH? Justifier la réponse.

<u>Question complémentaire</u> (4 points)

Le document présenté en annexe 1 est un extrait d'un manuel de CM 2 (collection Cap Maths, page 67 - Editions Hatier - 2004).

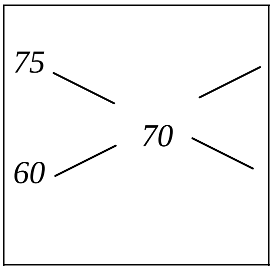
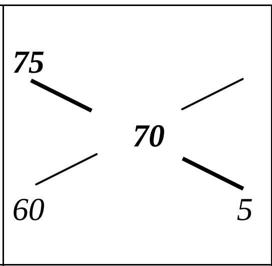
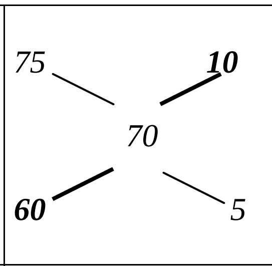
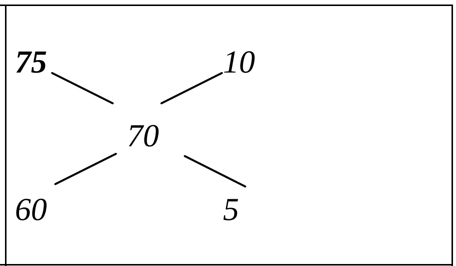
a. Quelle est la grandeur en jeu dans cette activité ? Justifier le titre « *Comparaison et mesure* ».
b. Indiquer la procédure attendue pour répondre à la question 1, compte tenu du matériel proposé.
c. Proposer une aide matérielle que le maître peut apporter à des élèves qui ne maîtrisent pas cette procédure.
d. Dans la question 2, quelle difficulté les élèves peuvent-ils rencontrer pour ranger les surfaces de la plus petite à la plus grande aire ?

Exercice 3 (4 points)

Dans des manuels de mathématiques du début du 20ème siècle, on enseignait une méthode appelée « la croix des mélanges ». Il s'agissait d'un algorithme, appuyé sur un schéma, pour déterminer les proportions d'un mélange comme l'illustre l'exemple qui suit.

« On a du vin à 75 centimes (de franc !) le litre et du vin à 60 centimes le litre. Dans quelles proportions faut-il les mélanger pour avoir du vin qui revienne à 70 centimes le litre ? »

On dispose généralement de la manière suivante les éléments du problème et sa résolution :

			
Etape 1 : les données	Etape 2 : calcul (par différence sur l'axe indiqué en gras)	Etape 3 : calcul (par différence sur l'autre axe)	Etape 4 : obtention de la réponse *On obtient alors **15** litres de vin à 70 centimes le litre* *"On devra donc mélanger les vins dans la proportion de 10 à 5 ou de 2 à 1."*

Source : "Cours d'arithmétique théorique et pratique" Jacquet et Laclef, Editeur Nathan, 1904, cité par Pierre Collaudin dans le Bulletin 439 (2002) de l'APMEP.

1. Dans l'exemple ci-dessus :
a. Vérifier par le calcul que les 15 litres de vin obtenu selon le mélange proposé à la fin de l'étape 4 reviennent bien à 70 centimes le litre.
b. Dans un litre de ce vin à 70 centimes le litre, donner sous forme de fraction la proportion de chaque type de vin composant le mélange.

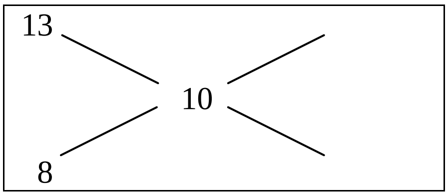
2. Appliquer l'algorithme ci-dessus pour obtenir un vin à 66 centimes le litre à partir d'un vin à 80 centimes le litre et d'un vin à 60 centimes le litre. Construire le schéma associé à ces nouvelles données et donner la proportion du mélange final.

3. Un problème plus contemporain

   « Une enseignante achète 15 albums de littérature de jeunesse pour sa classe. Elle choisit des albums à 8€ et d'autres à 13€ pour une dépense totale de 150€. Combien a-t-elle acheté d'albums de chaque type ? »

Dans les questions qui suivent, on propose plusieurs méthodes de résolution que l'on mettra en œuvre de manière indépendante.

a) Méthode n°1 utilisant l'algorithme de la croix des mélanges.
Reproduire le schéma ci-contre sur votre feuille, le compléter puis donner une solution au problème.



b) Méthode n°2 résolution algébrique
On note x et y les nombres respectifs d'albums à 13 € et à 8 €.
Résoudre le problème de façon algébrique.

c) Méthode n°3 utilisant un tableur

Le tableau ci-dessous correspond à une feuille de tableur donnant la somme payée selon le nombre d'albums à 8 € et le nombre d'albums à 13 € achetés.

- Proposer une formule entrée dans le tableur pour calculer le nombre de la case grisée (ligne 4, colonne M) ?
- Pourquoi n'est-il pas utile d'aller au-delà de la colonne V ou de la ligne 14 ?
- Utiliser cette feuille de calcul pour résoudre le problème.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1	Nombre d'albums à 13€	Nombre d'albums à 8€	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	0	**somme payée (en €)**	**0**	**8**	**16**	**24**	**32**	**40**	**48**	**56**	**64**	**72**	**80**	**88**	**96**	**104**	**112**	**120**	**128**	**136**	**144**	**152**
3	1		**13**	**21**	**29**	**37**	**45**	**53**	**61**	**69**	**77**	**85**	**93**	**101**	**109**	**117**	**125**	**133**	**141**	**149**	**157**	**165**
4	2		**26**	**34**	**42**	**50**	**58**	**66**	**74**	**82**	**90**	**98**	**106**	**114**	**122**	**130**	**138**	**146**	**154**	**162**	**170**	**178**
5	3		**39**	**47**	**55**	**63**	**71**	**79**	**87**	**95**	**103**	**111**	**119**	**127**	**135**	**143**	**151**	**159**	**167**	**175**	**183**	**191**
6	4		**52**	**60**	**68**	**76**	**84**	**92**	**100**	**108**	**116**	**124**	**132**	**140**	**148**	**156**	**164**	**172**	**180**	**188**	**196**	**204**
7	5		**65**	**73**	**81**	**89**	**97**	**105**	**113**	**121**	**129**	**137**	**145**	**153**	**161**	**169**	**177**	**185**	**193**	**201**	**209**	**217**
8	6		**78**	**86**	**94**	**102**	**110**	**118**	**126**	**134**	**142**	**150**	**158**	**166**	**174**	**182**	**190**	**198**	**206**	**214**	**222**	**230**
9	7		**91**	**99**	**107**	**115**	**123**	**131**	**139**	**147**	**155**	**163**	**171**	**179**	**187**	**195**	**203**	**211**	**219**	**227**	**235**	**243**
10	8		**104**	**112**	**120**	**128**	**136**	**144**	**152**	**160**	**168**	**176**	**184**	**192**	**200**	**208**	**216**	**224**	**232**	**240**	**248**	**256**
11	9		**117**	**125**	**133**	**141**	**149**	**157**	**165**	**173**	**181**	**189**	**197**	**205**	**213**	**221**	**229**	**237**	**245**	**253**	**261**	**269**
12	10		**130**	**138**	**146**	**154**	**162**	**170**	**178**	**186**	**194**	**202**	**210**	**218**	**226**	**234**	**242**	**250**	**258**	**266**	**274**	**282**
13	11		**143**	**151**	**159**	**167**	**175**	**183**	**191**	**199**	**207**	**215**	**223**	**231**	**239**	**247**	**255**	**263**	**271**	**279**	**287**	**295**
14	12		**156**	**164**	**172**	**180**	**188**	**196**	**204**	**212**	**220**	**228**	**236**	**244**	**252**	**260**	**268**	**276**	**284**	**292**	**300**	**308**

<u>Question complémentaire</u> (4 points)

Toutes les réponses devront être argumentées**.**

« *C'est le 15ème anniversaire du magasin "Disco" et Emilie a gagné 15 bons cadeaux de 10 € au tirage au sort effectué à cette occasion. Elle achète avec ces bons des CD en promotion à 8 € et d'autres CD à 13 €. Elle dépense pour cela tous ses bons cadeaux. Combien a-t-elle acheté de CD à 13 € et combien à 8 € ?* »

Le problème énoncé ci-dessus a été donné dans une classe de CM1 et dans une classe de CM2 en septembre 2006. Les copies de travaux d'élèves joints dans les annexes 2, 3 et 4 sont issues de ces classes.

a. Citer trois connaissances mathématiques nécessaires pour résoudre ce problème.

b. Etude de la production de Brice (CM1) (annexe 2)

   – Quelle erreur commet Brice dans son premier essai ? (travaux de gauche)
   – Analyser la technique opératoire qu'il met en jeu pour additionner des nombres ? Discuter de sa pertinence pour un élève de CM1 ?

c. Décrire les procédures utilisées respectivement par Laura (annexe 3) et Maxime (annexe 4) et analyser leurs erreurs éventuelles.

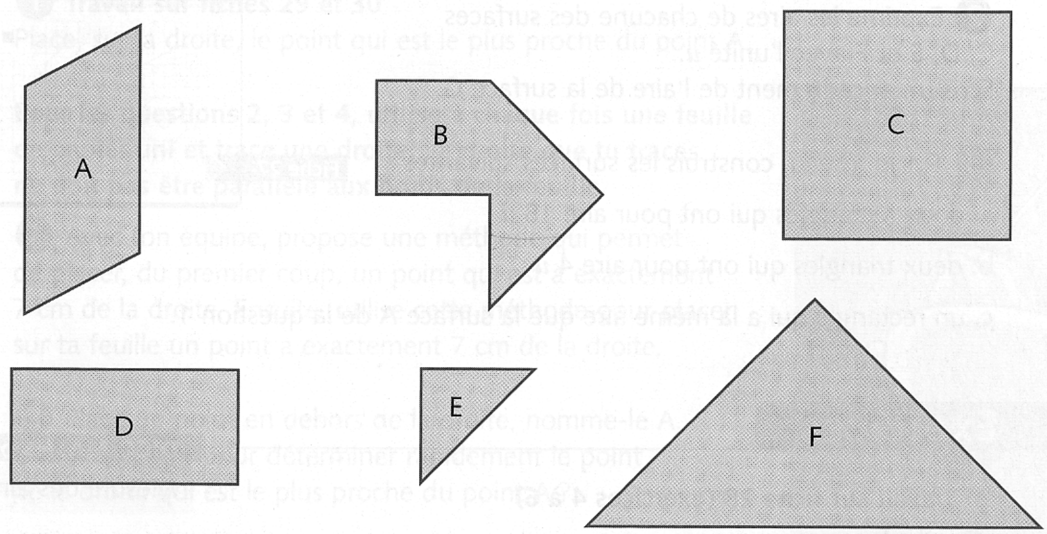
Annexe 1

Extrait de la page 67 du manuel « Cap Maths » - CM2 – Editions Hatier, 2004

Pour résoudre cet exercice, les élèves disposent de la fiche ci-dessous, d’un crayon et d’une règle.

Chercher **Comparaison et mesure**

▶ **Travail sur fiche 26**



1 Quelles sont les surfaces de même aire ?

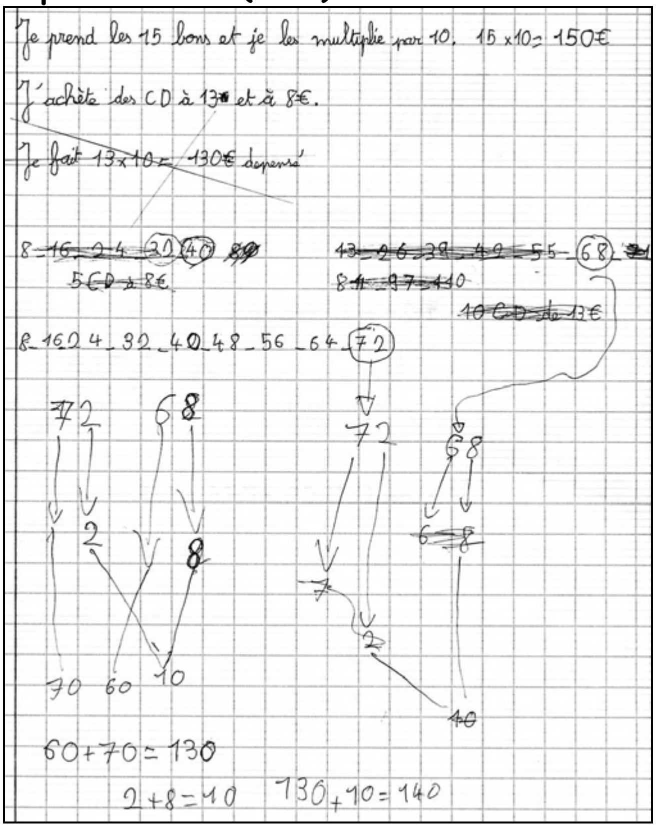
2 Range les surfaces de celle qui a la plus petite aire à celle qui a la plus grande aire.

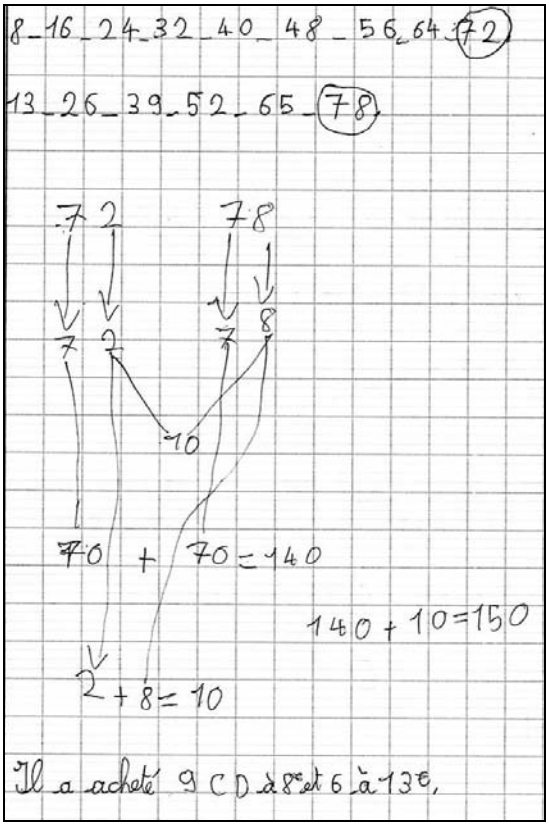
3 On prend la surface D comme unité. Quelle est la mesure des aires de A, B, C et E ?

4 On prend la surface E comme unité. Quelle est la mesure des aires de B, C, D et F ?

Annexe 2

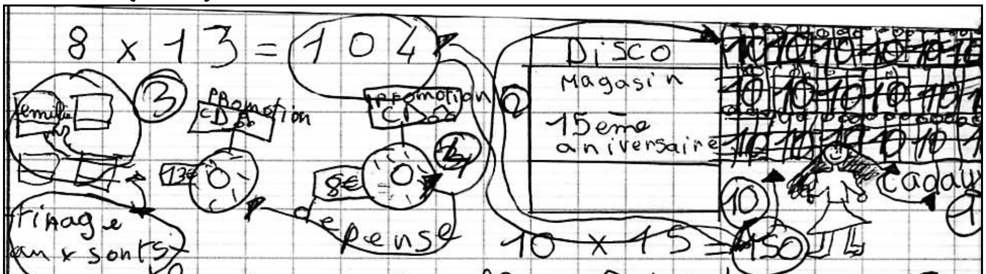
Copie de Brice (CM1)





Annexe 3

Copie de Laura (CM1)



Combien a-t-elle acheté de CD à 13
(6) euros et combien à 8 euros?

104
× 150
= 000
+ 70·
004
= 704

(2)

(1) De quelle somme dispose-t-elle? (5)

15 x 10 = 150€

le résulta c'est 704

(7) j'ai fait un dessin pour expliqué. j'ai fait le magasin Disco j'ai marqué le 15ème aniversaire du magasin.

Après j'ai fait la petite fille (Emilie). avec ses 15 cadeodisc de 10€ après j'ai fait le tirage au sort et après j'ai fait les disque de 8€ et de 13€ et j'ai fait 8×13 = 104 après j'ai fait 15×10 = 150€ après j'ai fait 104 × 150 = 704 Ensuite j'ai écris la question après j'ai trouver 704

Annexe 4

Copie de Maxime (CM2)

13 → 13, 26, 39, 52, 65, 78, 93, 104, 117, 130

8 → 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 9

130 + 8 + 8 = 146 + 8 = 154

130 − 13 = 117 + 13 = 114

117 − 13 = 101

104 + 8 + 8 + 8

+ 8 + 8 + 8 + 8 + 8 → 157 − 8 = 149

9 → 32 + 78 = 110 → 78 + 56 = 134 → 78 + 72 = 150

9x8 + 6x13

J'ai pensé à faire la table de 13 et de 8, puis j'ai aditionné les chiffres jusqu'à ce que je trouve. (pour que ce soit plus simple)
Je n'ai pas aditionner par exemple : 13 et 8.
J'ai fait en sorte que le resultat que je trouve s'approche de 150. Quand j'ai trouvé, combien c'était de fois x13 et de fois x8.