1 Exercice

1. Notons u_n le nombre de cubes nécessaires pour construire un escalier de taille n pour $n \geq 5$ une entier naturel. Il est clair que : $\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq 5 \Rightarrow u_{n+1} = n + 1 + u_n)$. Donc : $u_5 = 5+10 = 15$, $u_6 = 21$, $u_7 = 28$, $u_8 = 36$ et $u_9 = 45$.
2. Non il n'y a pas de proportionnalité. Par exemple pour $n = 5$, $\frac{n}{u_n} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ tandis que pour $n = 6$, $\frac{n}{u_n} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$. Comme $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{7}$ on peut affirmer qu'il n'y a pas proportionnalité.
3. En observant le mur il est clair que le nombre de cube est : $u_n = \frac{1}{2}n(n+1)$.
4. On peut trouver la réponse en étudiant les variations de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}x(x+1) - 3523$ qui est un trinôme dont la recherche des racines se fait par l'étude du signe du discriminant ...
   On vérifie alors que $\frac{1}{2} \times 83 \times (83+1) = 3403$ et $\frac{1}{2} \times 84 \times (84+1) = 3570$. Le plus haut escalier que l'on peut construire avec 3523 cubes mesure 83 cubes de haut et il reste $3570 - 3403 = 167$ cubes inutilisés.

2 Exercice

1. L'aire du jardin est : $\frac{1}{2}(AB + CD) \times DA$ puisque (DA) est une hauteur. En remplaçant par des valeurs numériques on trouve que l'aire du jardin est 1800m^2.
2. Notons $\mathcal{A}(AMGD)$ la mesure de l'aire de $AMGD$ en mètres. $\mathcal{A}(AMGD) = 30x$.
   Avec des notations similaires : $\mathcal{A}(MBCG) = 1800 - 30X$.
3. La pelouse et le potager ont la même aire si et seulement si : $30x = 1800 - 30x$. Autrement dit si et seulement si $x = \frac{1800}{2\times 30} = 30\text{m}$.
   Le potager est alors un carré car c'est un rectangle dont deux côtés consécutifs ont la même longueur.
4. a)

   b) Les aires du potager et de la pelouse sont égales lorsque x égale l'abscisse du point d'intersection des courbes. On retrouve bien le résultat de la question précédente. Les courbes représentatives sont des droites puisque les fonction s de la variable x sont affines.

   c) Il y a proportionnalité entre la quantité d'engrais et la surface à recouvrir. Si on note x la quantité d'engrais nécessaire pour recouvrir 900m^2 alors : $\frac{10}{500} = \frac{x}{900}$. On en déduit : $x = \frac{10\times 900}{500} = 18\text{kg}$.

3 Exercice

1. Si on accepte les tirages contradictoires alors on tire une étiquette parmi les 10 possibles puis une nouvelle étiquette parmi les 9 restantes. Au total on a donc 10×9 possibilités.
2. a)

   b)

   On construit les deux diagonales perpendiculaires. Soit B un sommet du quadrilatère donc sur une diagonale pour lequel l'angle est droit. Alors nécessairement pour que l'angle soit droit C et D appartiennent aux cercle de centre A passant par B. Ceci impose le dernier point E pour avoir un autre angle droit.
3. L'étiquette « Deux côtés égaux seulement »signifie que le quadrilatère n'est pas un parallélogramme. Il faut donc exclure :
   - Quatre angles droits

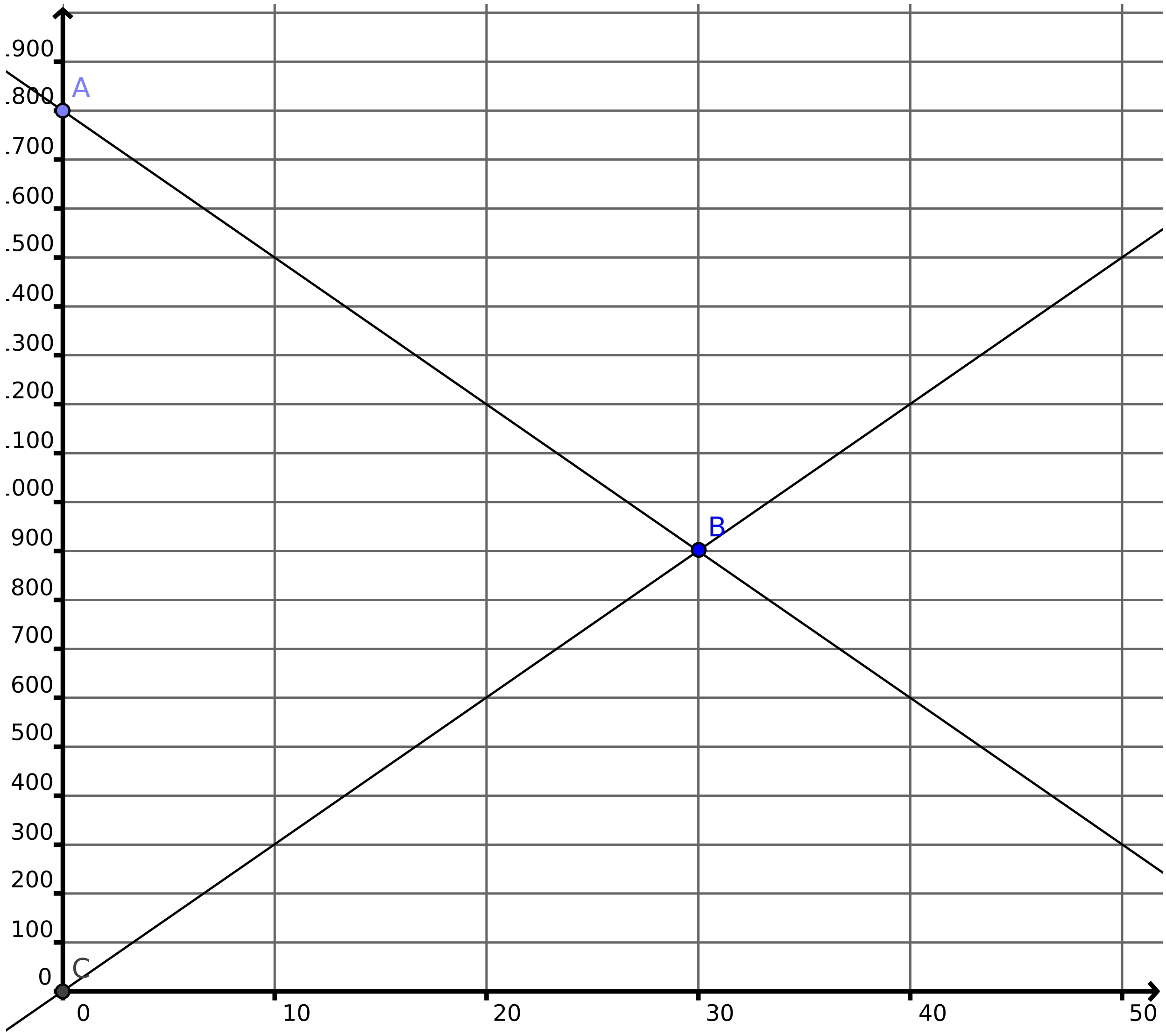

Figure 1 – Représentation graphique des aires en fonction de x.

- Côtés égaux deux à deux
- Quatre côtés égaux
- Côtés opposés parallèles
- Diagonales se rencontrant en leur milieu

4. Montrons que $EFGH$ est un parallélogramme en montrant que les côtés opposées sont parallèles.
   Puisque E (respectivement F) est le milieu de $[AB]$ (resp. $[BC]$), on peut affirmer, d'après le théorème de Thalès, que (FE) et (CA) sont parallèles. De la même façon : $(GH)//(CA)$. Donc : $(EF)//(GH)$.
   De la même façon on montrerait que : $(FG)//(EH)$.
   Montrons que $EFGH$ est un rectangle en montrant que ce parallélogramme a un angle droit.
   $$\left\{\begin{array}{l}(EF)//(CA)\\(CA)\perp(BD)\\(BD)//(FH)\end{array}\right. \Rightarrow (EF)\perp(FG)$$

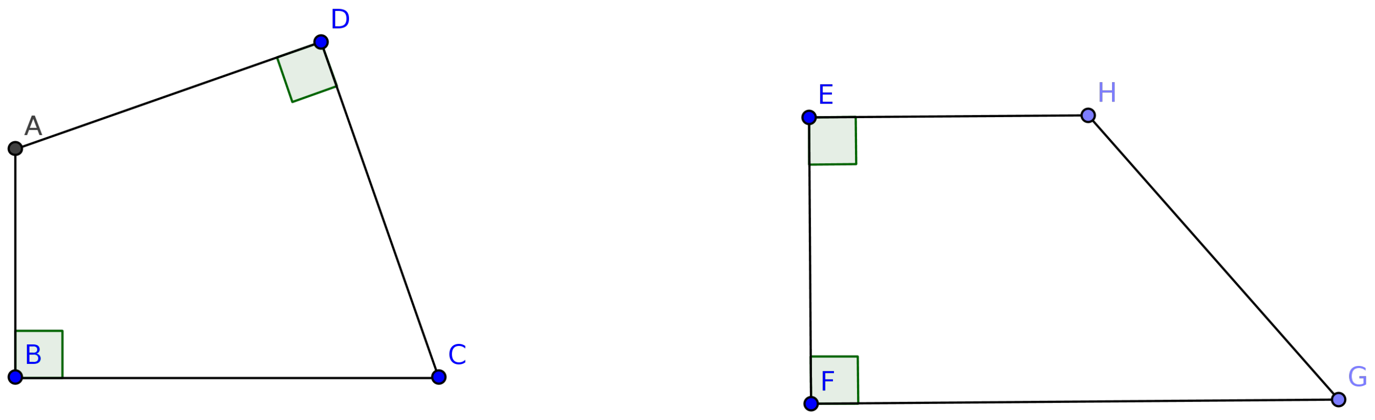

FIGURE 2 – Deux quadrilatères ayant deux angles droits seulement.

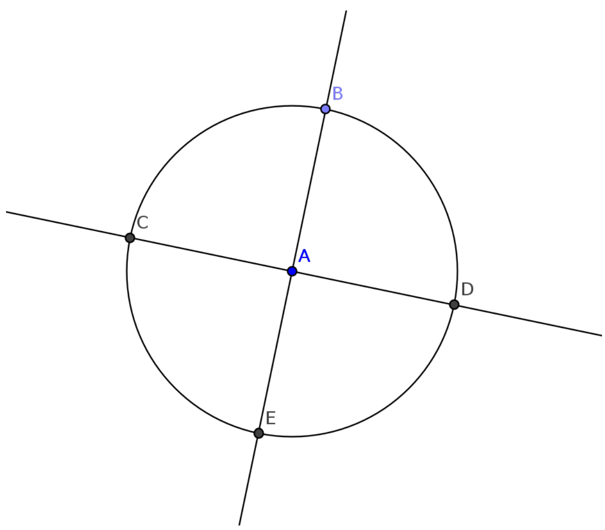

FIGURE 3 – Deux quadrilatères ayant deux angles droits seulement.