1 Exercice

1. $d = e = \frac{1}{2}c$ donc $b = \frac{3}{2}c$ donc $a = \frac{5}{2}c$.
2. Aire de la feuille : $\mathcal{A} = (a+b)a$ et d'après la question précédente :$\mathcal{A} = \left(\frac{5}{2}c + \frac{3}{2}c\right)\frac{5}{2}c$. En simplifiant : $\mathcal{A} = 10c^2$. Or $\mathcal{A} = 3610$ donc : $c = \sqrt{\frac{3610}{10}} = 19$ ou $c = -\sqrt{\frac{3610}{10}}$. Mais c étant une longueur c'est un nombre positif et finalement : $c = 19$cm.
   On en déduit les dimensions de la feuille : $a = \frac{5}{2} \times 19$ et $b = \frac{3}{2} \times 19$.
3. La pièce B pèse 100 grammes. Sa masse au centimètre carré est en grammes : $m = \frac{100}{\left(\frac{3\times c}{2}\right)^2}$.
   Donc le poids de la pièce A est de : $M(A) = m \times \left(\frac{5}{2} \times c\right)^2 = \frac{100}{\left(\frac{3\times c}{2}\right)^2} \times \left(\frac{5}{2} \times c\right)^2 = 100 \times \left(\frac{5}{3}\right)^2$.
   En arrondissant à un décigramme près : $\mathcal{A} \simeq 833,3$g.
4. L'arrête du cube A a une longueur de $a = \sqrt[3]{2}$. D'après la question 1) le cube C a donc une arrête de longueur $c = \frac{2}{5} \times a = \frac{2}{5} \times \sqrt[3]{2}$. Donc le volume de C est, en m^3, $\mathcal{V}(C) = \left(\frac{2}{5} \times \sqrt[3]{2}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} \times 2$.
   Donc en dm^3 : $\mathcal{V}(C) = \frac{2^3}{5^3} \times 2 \times 10^3$

2 Exercice

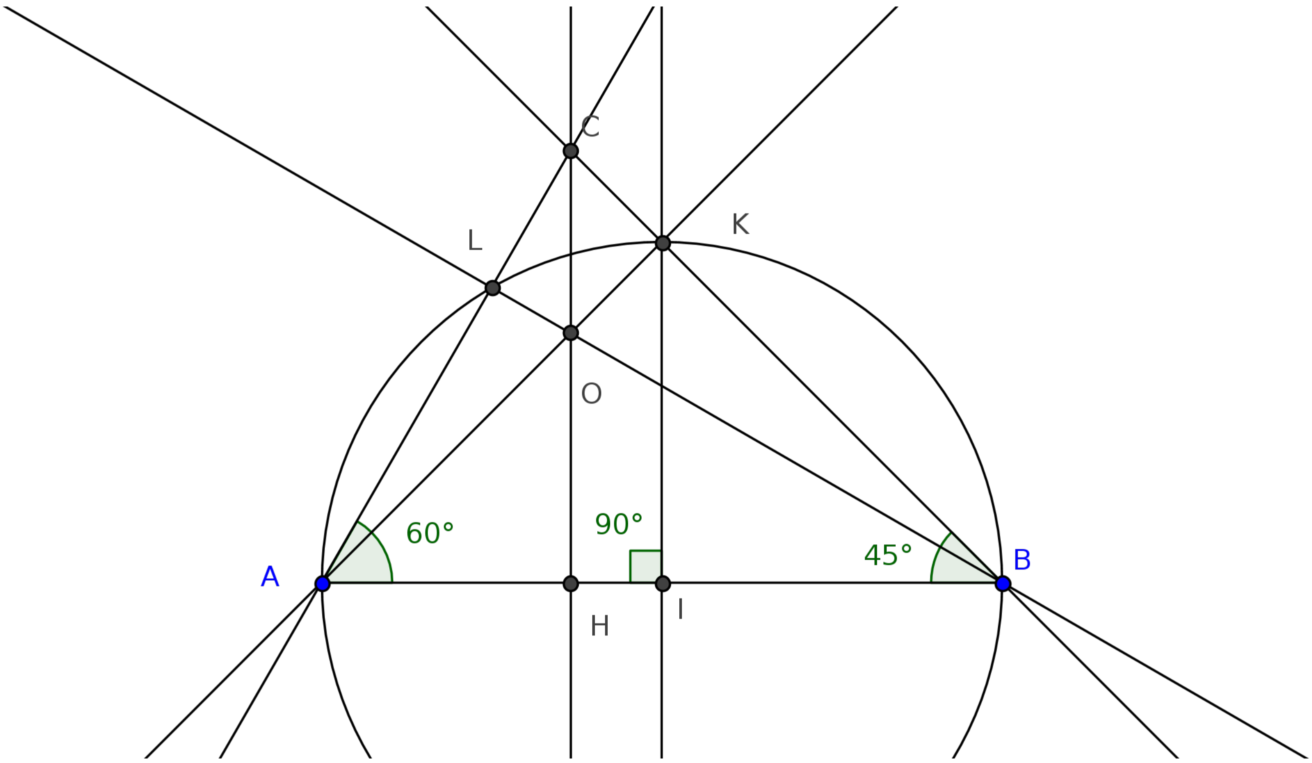

FIGURE 1 – Illustration de l'exercice.

1. Puisque $K \in \mathcal{C}$, AKB est rectangle en K. Comme de plus l'angle $\hat{B}$ mesure 45° et que la somme des angles d'un triangle égale un angle plat on en déduit que le triangle ABK est isocèle rectangle en K. La hauteur issue de K et la médiatrice du segment $[AB]$ sont donc confondues. Donc KI est la médiatrice de $[AB]$.
2. Montrons que O est l'orthocentre du triangle ABC.
   - $L \in \mathcal{C} \Rightarrow ALB$ est rectangle en L. Donc (LB) est la hauteur issue de B.
   - $k \in \mathcal{C} \Rightarrow AKB$ est rectangle en K. Donc (KA) est la hauteur issue de A.

O est donc le point d'intersection de deux hauteurs du triangle ABC.
Les trois hauteurs d'un triangle se coupent en l'orthocentre si bien que O appartient nécessairement à la troisième hauteur (HC).
Autrement dit les points O, H et C sont alignés.

3. Le quadrilatère convexe $IKCD$ est trapèze. En effet les droites (OC) et (KI) sont (en tant que hauteur et médiatrice) perpendiculaires à (AB) donc sont parallèles entre elles.
4.

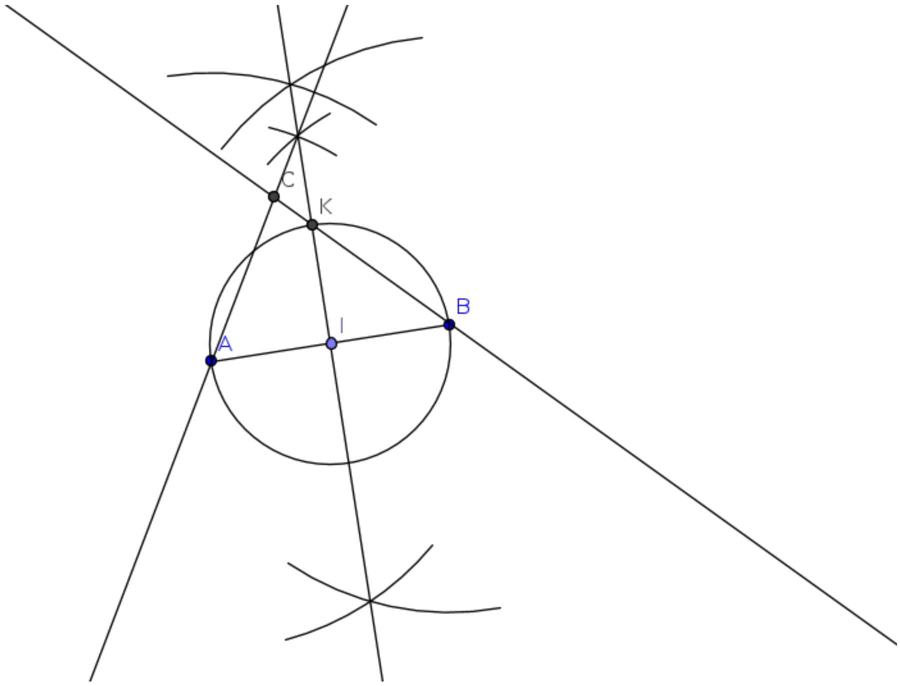

FIGURE 2 – Construction.

3 Exercice

1. $26 = 5 + 3 \times 7$, $43 = 2 \times 5 + 3 \times 11$ et $220012 = 5 + 7 + 20000 \times 11$.
2. a) Un score du jeu est un nombre qui peut s'écrire : $5\alpha + 7\beta + 11\gamma$. Si le score est 34 alors nécessairement $\alpha \leq 7$, $\beta \leq 4$ et $\gamma \leq 3$. Écrivons dans le tableau ci-dessous toutes les sommes $5\alpha + 7\beta$ possibles.

α – β	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	5	10	15	20	25	30	35	40
1	7	12	17	22	27	32	37	42	47
2	14	19	24	29	34	39	44	49	54
3	21	26	31	36	41	46	51	56	61
4	28	33	38	43	48	53	58	63	68
5	35	40	45	50	55	60	65	70	75

Si $\gamma = 3$ alors $5\alpha + 7\beta = 1$ ce qui est impossible.
Si $\gamma = 2$ alors $5\alpha + 7\beta = 12$ qui a une solution : $(\alpha; \beta) = (1; 1)$.
Si $\gamma = 1$ alors $5\alpha + 7\beta = 23$ ce qui est impossible.
Si $\gamma = 0$ alors $5\alpha + 7\beta = 34$ qui a une solution : $(\alpha; \beta) = (4; 2)$.

En conclusion il n'existe que deux jeux correspondant au score 34 qui sont 5+7+11+11 et 5+5+5+5+7+7.

b) En procédant de même (avec le même tableau) on peut affirmer que le score 45 est réalisé par les quatre jeux : 5+7+7+7+7+7, 5+5+5+5+5+5+5+5, 5+5+7+7+11, 7+11+11+11.

3. Déterminons tous les triplets $(\alpha;\beta;\gamma)$ tels que $\alpha+\beta+\gamma=3$.

α	β	γ	Score
0	0	3	33
0	1	2	29
0	2	1	25
1	0	2	27
1	1	1	23
1	2	0	19
2	0	1	21
2	1	0	17
3	0	0	15

4. a) $14=7+7$, $15=5+5+5$, $16=5+11$, $17=5+5+7$ et $18=7+11$.
Notons P_n pour $n \geq 14$ un entier naturel, la proposition : « n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ sont des scores possibles. ».
La proposition est vraie pour $n=14$.
Soit $n \geq 14$ un entier naturel. Supposons P_n vraie et montrons qu'alors P_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ sont des scores possibles. De plus $n+5$ est un score possible puisque n est un score possible et que 5 est aussi un score possible. Ainsi P_{n+1} est vraie.

b) Les entiers qui ne correspondent à aucun score sont donc des entiers $n<14$. L'ensemble des entiers ne correspondant pas à un score est : $\{1,2,3,4,6,8,9,11,13\}$.