Concours général de mathématique s 2018.

Durée : 5 heures.
La calculatrice est autorisée conformément à la réglementation.
La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

I Problème : approximations de courbes.

Partie A : les polynômes de Bernstein.

Pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel i compris entre 0 et n, on note $B_{n,i}$ le polynôme défini pour p variant dans l'intervalle $[0;1]$ par

$$B_{n,i}(p) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i},$$

avec $\binom{n}{i}$ le coefficient binomial, i parmi n. Ainsi $B_{0,0}(p) = 1$, $B_{1,0}(p) = 1 - p$ et $B_{1,1}(p) = p$.

Ces polynômes sont appelés ***polynômes de Bernstein***.

1. (a) Donner l'expression de $B_{2,0}(p)$, $B_{2,1}(p)$ et $B_{2,2}(p)$.

   (b) Déterminer l'expression des polynôme des Bernstein pour $n = 3$, à savoir $B_{3,0}(p)$, $B_{3,1}(p)$, $B_{3,2}(p)$ et $B_{3,3}(p)$.

2. (a) Quelle est l'expression de $B_{n,0}(p)$ et de $B_{n,n}(p)$?

   (b) Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout i compris entre 1 et $n-1$,

   $$B_{n,i}(p) = (1-p)B_{n-1,i}(p) + pB_{n-1,i-1}(p).$$

3. (a) En quelle(s) valeur(s) $p \in [0;1]$ s'annule un polynôme de Bernstein ? *On raisonnera en distinguant les cas selon les valeurs de n et de i.*

   (b) Qu'en est-il de son signe sur $[0;1]$?

4. Démontrer que les polynômes de Bernstein d'un même degré n forment une partition de l'unité : c'est-à-dire, que pour tout entier naturel n,

   $$\sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(p) = B_{n,0}(p) + B_{n,1}(p) + \cdots + B_{n,n-1}(p) + B_{n,n}(p) = 1.$$

5. Déterminer la valeur des sommes

$$\sum_{i=0}^{n} iB_{n,i}(p) \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{n} i^2 B_{n,i}(p).$$

Que représentent ces sommes en termes probabilistes ?

Partie B : des courbes de Bézier.

On munit le plan d'un repère orthonormé (O,I,J). Soit n un entier naturel. On se donne $n+1$ points non alignés du plan P_0, P_1, $\ldots$, P_{n-1}, P_n.

On appelle ***courbe de Bézier*** de degré n et de points de contrôle P_0, P_1, $\ldots$, P_{n-1}, P_n l'ensemble des points $M(p)$ du plan avec p variant dans l'intervalle $[0;1]$ tels que

$$\overrightarrow{OM(p)} = \sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(p)\overrightarrow{OP_i}.$$

Dans la suite on va s'intéresser à des courbes de Bézier de degré 0, 1 ou 2.
On se fixe donc A, B, C trois points du plan non alignés.

1. Reconnaître la nature géométrique

   (a) de la courbe de Bézier de degré 0 et de point de contrôle A.

   (b) de la courbe de Bézier de degré 1 et de points de contrôle B et C.

2. On s'intéresse à une courbe de Bézier de degré 2 et de points de contrôle A, B et C.

   (a) Justifier que les points A et C appartiennent à cette courbe. Le point B y appartient-il ?

   (b) Dans cette question on prend des points de coordonnées $A(-2;5)$, $B(2;1)$ et $C(4;3)$. Proposer une construction des points de cette courbe pour $p=\frac{1}{4}$, $p=\frac{1}{2}$ et $p=\frac{3}{4}$. Tracer la courbe à main levée.

3. Démontrer que cette courbe est nécessairement inscrite dans le triangle ABC.

4. Quelle pourrait être la nature géométrique de cette courbe de Bézier de degré 2 ? Justifier votre réponse.

II Problème : un si discret Monsieur Dirichlet.

Soit $\mathscr{S}$ un ensemble fini non vide de points du plan. Certaines paires de points de $\mathscr{S}$ sont reliées par des traits, éventuellement en plusieurs étapes, il est toujours possible de passer d'un point à n'importe quel autre (les intersections éventuelles entre les traits ne sont pas considérées et un point n'est jamais relié à lui-même).

Deux points de $\mathscr{S}$ reliés par un trait sont dit ***voisins***.

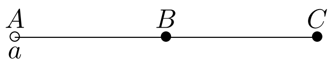
Si M est un point de $\mathscr{S}$, on note $V(M)$ l'ensemble des voisins de M, et on note $d(M)$ le nombre de voisins de M, appelé le ***degré*** de M.

Chaque point de $\mathscr{S}$ a été colorié soit en bleu soit en jaune, et il y a au moins un point jaune dans l'ensemble $\mathscr{S}$. À chaque point jaune, Gustav a attribué un nombre réel de son choix. La mathématicienne Maryam voudrait alors attribuer un réel à chaque point bleu (pas forcément le même nombre d'un point bleu à un autre) de façon à satisfaire la propriété suivante :

($\mathscr{P}$) **Le nombre attribué à tout point bleu est la moyenne des nombres attribués à ses voisins.**

Partie A : quelques exemples pour commencer.

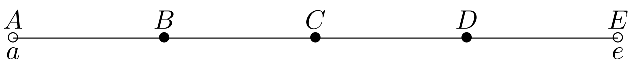
1. Dans cette question uniquement, on suppose que $\mathscr{S} = \{A,B,C\}$, avec A voisin de B, lui-même voisin de C comme sur le dessin ci-dessous.



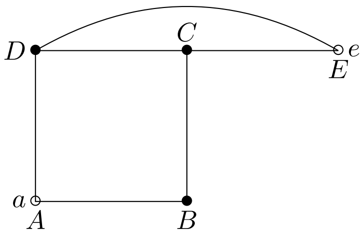
De plus A est le seul point jaune et Gustav lui a attribué le réel a.
Quels nombres Maryam doit-elle alors attribuer à B et à C afin de satisfaire la propriété ($\mathscr{P}$) ?

2. Pour les trois questions suivantes on suppose que $\mathscr{S} = \{A,B,C,D,E\}$. Les points A et E sont les seuls points jaunes, et Gustav leur attribué respectivement les réels a et e.

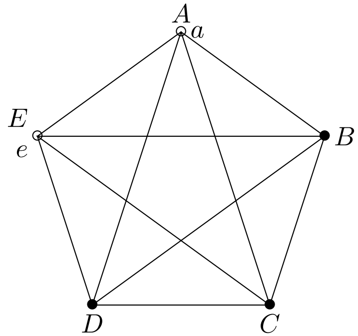
   (a) Les liaisons étant indiquées selon le schéma suivant, quels nombres Maryam doit-elle alors attribuer à chacun des points B, C et D afin de satisfaire la propriété ($\mathscr{P}$) ?



(b) Même question pour le schéma suivant :



(c) Même question pour le schéma suivant :



3. Dans cette question uniquement on généralise le schéma de la question 2-(c) avec un nombre quelconque de points.

   On suppose que $n \geqslant 1$ est un entier, que $\mathscr{S} = \{P_0,P_1,P_2,\ldots,P_n,P_{n+1}\}$ et que tout point de $\mathscr{S}$ est voisin de chaque autre point de $\mathscr{S}$. De plus, P_0 et P_{n+1} sont les seuls points jaunes, et Gustav leur a attribué respectivement les réels a et b. Quels nombres Maryam doit-elle alors attribuer à chacun des points P_i pour $i = 1,\ldots,n$ afin de satisfaire la propriété $(\mathscr{P})$?

Partie B : étude du cas général.

On note respectivement $\mathscr{J}$ l'ensemble des points jaunes, et, $\mathscr{B}$ l'ensemble des points bleus. Ainsi

$$\mathscr{S} = \mathscr{J} \cup \mathscr{B}.$$

Quand Gustav attribue un réel à chaque point jaune, cela consiste à définir une fonction k de $\mathscr{J}$ dans $\mathbb{R}$.

L'objectif de Maryam est donc de construire une fonction $f : \mathscr{S} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} f(M) = k(M) \text{ si } M \text{ est jaune (1)} \\ f(M) = \frac{f(P_1)+\cdots+f(P_d)}{d} \text{ si } M \text{ est bleu (2)} \\ \text{où } d = d(M) \text{ est le degré de } M \text{ (qui dépend de } M\text{) et} \\ P_1, \ldots, P_d \text{ les voisins de } M. \end{cases}$$

On dira que f est une solution ***pour l'attribution*** k.

Dans cette partie on suppose donc donnée une telle distribution k.

On note K le plus grand des nombres $k(M)$ lorsque M décrit l'ensemble $\mathscr{J}$.

Existence d'une solution.

1. On suppose dans cette question que $k(M) \geqslant 0$ pour tout point $M \in \mathscr{J}$. On construit alors, par récurrence, la suite (f_n) de fonctions suivante :

   On pose $f_0(M) = k(M)$ si M est jaune, et $f_0(M) = 0$ si M est bleu.
   Puis, pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose

$$\begin{cases} f_{n+1}(M) = k(M) \text{ si } M \text{ est jaune} \\ f_{n+1}(M) = \frac{f_n(P_1)+\cdots+f_n(P_d)}{d} \text{ si } M \text{ est bleu} \\ \text{où } d = d(M) \text{ est le degré de } M \text{ (qui dépend de } M\text{) et} \\ P_1, \ldots, P_d \text{ les voisins de } M. \end{cases}$$

   (a) Prouver que, pour tout $n \geqslant 0$ et tout point $M \in \mathscr{S}$, on a $0 \leqslant f_n(M) \leqslant f_{n+1}(M) \leqslant K$.

   (b) En déduire l'existence d'une solution pour l'attribution de k.

2. Prouver que si f est une solution pour l'attribution k et si α est une constante, alors la fonction $f + \alpha$ est aussi une solution pour l'attribution $k + \alpha$.

3. En déduire qu'il existe une solution à notre problème en général, c'est-à-dire sans l'hypothèse de la question 1 : $k(M) \geqslant 0$ pour tout point $M \in \mathscr{J}$.

Unicité de la solution.

On suppose dans cette sous-partie que l'on dispose d'une solution f pour cette attribution k.

4. Prouver que, pour tout point $M \in \mathscr{S}$, on a $f(M) \leqslant K$.

5. Supposons que g soit également une solution pour l'attribution de k.

   (a) Justifier que la fonction $f - g$ vérifie la condition (2).

   (b) Que vaut $f - g$ sur $\mathscr{J}$?

   (c) En déduire que $f = g$.

6. Que peut-on dire de f s'il n'y a qu'un seul point jaune ?

III Problème : les nombres en or.

On note φ la plus grande racine réelle de l'équation $x^2 = x + 1$. Le nombre φ connu depuis l'antiquité, est appelé nombre d'or. Un réel x est dit un ***nombre en or*** s'il existe :

— deux entiers naturels p et q

— des entiers a_p, a_{p-1}, ..., a_0, ..., a_{-q} ne prenant que les valeurs 0 ou 1 tels que

$$x = a_p\varphi^p + a_{p-1}\varphi^{p-1} + \cdots + a_1\varphi + a_0 + a_{-1}\varphi^{-1} + \cdots + a_{-q}\varphi^{-q}.$$

Dans ce cas, on notera $x \rhd a_pa_{p-1}\ldots a_0{,}a_{-1}\ldots a_{-q}$.

Par exemple si $x = \varphi^3 + \varphi^2 + 1 + \dfrac{1}{\varphi} + \dfrac{1}{\varphi^4}$, on notera $x \rhd 1101{,}1001$. On dira alors que 1101,1001 est une ***représentation en or*** de x.

Il est clair que l'on peut ajouter, au début, ou à la fin de la représentation autant de 0 que l'on souhaite.

Une séquence de la représentation est une suite de 0 et de 1 qui apparaît dans la représentation. Dans l'exemple précédent, 10110 est une séquence de la représentation 1**101**,**10**1.

Partie A : tous les entiers naturels sont en or.

1. Montrer que, dans la représentation en or de x, on peut remplacer toute séquence 011 par 100 et réciproquement afin d'obtenir une autre représentation en or de x.
   Par exemple le réel dont la représentation en or est 1101,1001 admet également 1110,0001 et 1101,0111 comme représentation en or.
   On dira que les deux séquences 011 et 100 sont équivalentes.

2. Plus généralement, donner une séquence dans laquelle il n'y a jamais deux 1 consécutifs et qui soit équivalente à $011\dots1$ où il y a n occurrences du chiffre 1.

3. Montrer que les entiers 2 et 3 sont des nombres en or et en donner une représentation en or.

4. Montrer que tous les entiers naturels admettent une représentation en or.

Partie B : représentation en or pur.

On dira qu'une représentation $x \rhd a_p a_{p-1} \dots a_0{,}a_{-1} \dots a_{-q}$ d'un nombre en or est en ***or pur*** si pour tout i,

$$a_i a_{i+1} = 0.$$

En d'autres termes une représentation est en or pur si elle ne contient jamais deux 1 consécutifs.

Soit x un réel non nul, si $x \rhd a_p a_{p-1} \dots a_0{,}a_{-1} \dots a_{-q}$, on définit la ***teneur en or*** de la représentation comme étant égale à l'exposant de la plus grande puissance de φ dont le coefficient vaut 1, dans l'égalité $x = a_p\varphi^p + \cdots + a_{-q}\varphi^{-q}$.

Par exemple la teneur de la représentation 1101,1001 est égale à 3 et celle de 0,0010 est égale à -3.

1. Donner une représentation en or pur des entiers 2, 3, 4 et 5.

2. Soit x un réel ayant une représentation en or pur de teneur en or égale à n.

   (a) Montrer que
   $$\varphi^n \leqslant x < \varphi^{n+1}.$$

   (b) Montrer que la représentation en or pur d'un réel, si elle existe, est unique.

3. Soit x un réel non nul ayant une représentation en or pur.

   (a) Exprimer la teneur en or de la représentation en or pur de x à l'aide des fonctions logarithme népérien et partie entière.

   (b) Écrire un algorithme permettant de déterminer cette représentation.

   (c) Appliquer votre algorithme pour $x = 2018$.

4. Montrer qu'un réel en or possède forcément une représentation en or pur.

5. Montrer qu'il existe des réels strictement positifs qui ne sont pas en or.