Concours général de mathématique s 2018.

I Problème : approximations de courbes.

Partie A : les polynômes de Bernstein.

Dans cette partie il s'agit de retrouver des résultats de probabilité concernant une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

1. (a) Rappelons que les coefficients binomiaux peuvent se retrouver avec la formule

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!},$$

où $n! = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ est appelé factorielle n avec la convention $0! = 1$.

Il est aussi possible de les retrouver en utilisant le triangle de Pascal que nous construisons grâce à la formule de Pascal

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1}$$

	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Déterminons les polynômes de Bernstein pour $n = 2$.

$$\begin{aligned} B_{2,0}(p) &= \binom{2}{0} p^0 (1-p)^{2-0} \\ &= \frac{2!}{(2-0)!0!}(1-p)^2 \\ &= p^2 - 2p + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_{2,1}(p) &= \binom{2}{1} p^1(1-p)^{2-1} \\ &= \frac{2!}{(2-1)!1!} p(1-p) \\ &= -2p^2 + 2p\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_{2,2}(p) &= \binom{2}{2} p^2(1-p)^{2-2} \\ &= \frac{2!}{2!(2-2)!} p^2 \\ &= p^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}B_{2,0}(p) &= p^2 - 2p + 1 \\ B_{2,1}(p) &= -2p^2 + 2p \\ B_{2,2}(p) &= p^2\end{aligned}}$$

(b) Déterminons les polynômes de Bernstein pour $n = 3$.

$$\begin{aligned}B_{3,0}(p) &= (1-p)^3 \\ &= -p^3 + 3p^2 - 3p + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_{3,1}(p) &= 3p(1-p)^2 \\ &= 3p^3 - 6p^2 + 3p\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_{3,2}(p) &= 3p^2(1-p) \\ &= -3p^3 + 3p^2\end{aligned}$$

$$B_{3,3}(p) = p^3$$

$$\boxed{\begin{aligned} B_{3,0}(p) &= -p^3+3p^2-3p+1 \\ B_{3,1}(p) &= 3p^3-6p^2+3p \\ B_{3,2}(p) &= -3p^3+3p^2 \\ B_{3,3}(p) &= p^3 \end{aligned}}$$

2. (a) Puisque $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$ le résultat est clair.

$$\begin{aligned} B_{n,0}(p) &= \binom{n}{0}p^0(1-p)^{n-0} \\ &= (1-p)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{n,n}(p) &= \binom{n}{n}p^n(1-p)^{n-n} \\ &= p^n \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} B_{n,0}(p) &= (1-p)^n \\ B_{n,0}(p) &= p^n \end{aligned}}$$

(b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et i un entier naturel tel que $1 \leq i \leq n-1$.

$$\begin{aligned} &(1-p)B_{n-1,i}(p)+pB_{n-1,i_1}(p) \\ &= (1-p)\binom{n-1}{i}p^i(1-p)^{n-1-i}+p\binom{n-1}{i-1}p^{i-1}(1-p)^{n-1-(i-1)} \\ &= \binom{n-1}{i-1}p^i(1-p)^{n-i}+\binom{n-1}{i-1}p^i(1-p)^{n-i} \\ &= \left[\binom{n-1}{i}+\binom{n-1}{i-1}\right]p^i(1-p)^{n-i} \\ &= \binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}, \quad \text{d'après la formule de Pascal} \\ &= B_{n,i}(p) \end{aligned}$$

Nous avons donc démontré que

quelque soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1,n-1]\!]$,
$B_{n,i}(p) = (1-p)B_{n-1,i}(p) + pB_{n-1,i-1}(p)$.

3. (a) Déterminons les racines des $B_{n,i}$.

   * Si $n = 0$, alors $B_{0,0}(p) = 1$ ne s'annule pas.
   * Si $n = 1$ et
     — si $i = 0$, alors $B_{1,0}(p) = 1 - p$ s'annule en 1 uniquement.
     — si $i = 1$, alors $B_{1,1}(p) = p$ s'annule en 0 uniquement.
   * Si $n > 1$ et
     — si $i = 0$, alors $B_{n,0}(p) = (1-p)^n$ s'annule en 1 uniquement.
     — si $i = 1$, alors $B_{n,n}(p) = p^n$ s'annule en 0 uniquement.
     — si $i \in [\![1,n-1]\!]$, alors $B_{n,i} = \binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$ admet deux racines distinctes : 0 et 1.

   (b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![0,n]\!]$.
   $\binom{n}{i} > 0$, et, pour tout $p \in [0;1]$, $p^i > 0$ et $(1-p)^{n-i} > 0$. Le produit de ces trois facteurs est donc encore strictement positif.

   $\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in [\![0,n]\!], \forall p \in [0;1], B_{n,i}(p) > 0.$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Notons $P(n)$: « $\sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(p) = 1$ ».

   Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

   (a) Initialisation.
   Démontrons que $P(0)$ est vraie.

$$\begin{aligned} B_{0,0}(p) &= \binom{0}{0}p^0(1-p)^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

   Donc $P(0)$ est vraie.

   (b) Hérédité.
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Supposons que $P(n)$ est vraie et démontrons que $P(n+1)$ est vraie.

Soit $p \in [0;1]$.

Notons

$$S_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} B_{n+1,i}(p)$$

Donc :

$$S_{n+1} = B_{n+1,0}(p) + B_{n+1,n+1}(p) + \sum_{i=1}^{n} B_{n+1,i}(p)$$

D'après la question 2.b :

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= (1-p)^{n+1} + p^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} [(1-p)B_{n,i}(p) + pB_{n,i-1}(p)] \\
&= (1-p)^{n+1} + p^{n+1} + (1-p)\left[\sum_{i=1}^{n} B_{n,i}(p)\right] + p\left[\sum_{i=1}^{n} B_{n,i-1}(p)\right] \\
&= (1-p)^{n+1} + p^{n+1} + (1-p)\left[\sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(p)\right] - (1-p)B_{n,0}(p) \\
&\quad + p\left[\sum_{j=0}^{n-1} B_{n,j}(p)\right]
\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= (1-p)^{n+1} + p^{n+1} + (1-p) - (1-p)^{n+1} + p\left[\sum_{j=0}^{n} B_{n,j}(p)\right] \\
&\quad - pB_{n,n}(p)
\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
&= p^{n+1} + (1-p) + p - p^{n+1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Nous avons démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(p) = 1.$$

Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(p) = 1$.

Démonstration alternative et plus élégante en utilisant la formule du binôme de Newton qui est hors programme.

Pour a et b des réels (ou des complexes) et n une entier naturel :

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

En particulier pour $a = p$ et $b = 1 - p$

$\sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(p) = 1 = 1.$

5. Le plus simple est évidemment d'adopter un point de vue probabiliste. Mais l'énoncé semble vouloir démontrer ces résultats de probabilité nous préférerons donc une autre approche.

$\displaystyle\sum_{i=0}^{n} iB_{n,i}(p)$ et $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^2 B_{n,i}(p)$ sont respectivement l'espérance et le moment d'ordre deux d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.

Cela nous permet de conjecturer les résultats à démontrer. En effet si X suit une loi binomiale de paramètre n et p, alors $E(X) = np$ et puisque $V(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = np(1-p)$, le moment d'ordre deux est $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = np(1-p) + n^2p^2$.

Démontrons que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} iB_{n,i}(p) = np$.

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: « $\sum_{i=0}^{n} iB_{n,i}(p) = np$ ».

* $P(0) =$ est évidemment vraie.

* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et démontrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie.

Notons :

$$\begin{aligned}
T_{n+1} &= \sum_{i=0}^{n+1} iB_{n+1,i}(p) \\
&= (n+1)B_{n+1,n+1}(p) + \sum_{i=1}^{n} iB_{n+1,i}(p) \\
&= (n+1)p^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} i(1-p)B_{n,i}(p) + ipB_{n,i-1}(p) \\
&= (n+1)p^{n+1} + (1-p)\left[\sum_{i=1}^{n} iB_{n,i}(p)\right] + p\left[\sum_{i=1}^{n} iB_{n,i-1}(p)\right]
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
T_{n+1} &= (n+1)p^{n+1} + (1-p)np + p\left[\sum_{i=1}^{n} iB_{n,i-1}(p)\right] \\
&= (n+1)p^{n+1} + (1-p)np + p\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)B_{n,j}(p) \\
&= (n+1)p^{n+1} + (1-p)np + p\left[\sum_{j=0}^{n}(j+1)B_{n,j}(p)\right] - p(n+1)p^{n} \\
&= (1-p)np + p\left[\sum_{j=0}^{n} jB_{n,j}(p)\right] + p\left[\sum_{i=0}^{n} B_{n,j}(p)\right]
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence et la question 4 :

$$\begin{aligned}
T_{n+1} &= (1-p)np + pnp + p \\
&= np - np^2 + np^2 + p \\
&= (n+1)p
\end{aligned}$$

Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

Nous avons démontré par récurrence que, quelque soit $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{i=0}^{n} iB_{n,i}(p) = np.$$

Démontrons que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} iB_{n,i}(p) = np$.

Encore une démonstration plus rapide et plus élégante utilisant la formule du binôme.

Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x,b) \in \mathbb{R}^2$ nous avons

$$(x+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i b^{n-i}$$

De part et d'autre du signe d'égalité nous voyons des fonctions polynomiales de la variable x, donc dérivables sur $\mathbb{R}$ et en dérivant :

$$n(x+b)^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} ix^{i-1} b^{n-i}$$

En multipliant terme à terme par x

$$nx(x+b)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} ix^{i} b^{n-i}$$

Enfin
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} ix^{i} b^{n-i} = nx(x+b)^n$$

Donc pour $x = p$ et $b = 1 - p$,

$$\sum_{i=0}^{n} iB_{n,i}(p) = np$$

Ce qui reste valable pour $n = 0$ donc :

nous avons démontré que $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} iB_{n,i}(p) = np$.

Démontrons par récurrence que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^2 B_{n,i}(p) = np(1-p) + n^2p^2$.

Notons $P(n)$: « $\sum_{i=0}^{n} i^2 B_{n,i}(p) = np(1-p) + n^2p^2$ quelque soit $n \in \mathbb{N}$.

* $P(0)$ est trivialement vraie.

* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et démontrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie.

Notons :

$$\begin{aligned}
H_{n+1} &= \sum_{i=0}^{n+1} i^2 B_{n+1,i}(p) \\
&= (n+1)^2 B_{n+1,n+1}(p) + \sum_{i=1}^{n} i^2 B_{n+1,i}(p) \\
&= (n+1)^2 p^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} i^2(1-p)B_{n,i}(p) + i^2 p B_{n,i-1}(p) \\
&= (n+1)^2 p^{n+1} + (1-p)\left[\sum_{i=1}^{n} i^2 B_{n,i}(p)\right] + p\left[\sum_{i=1}^{n} i^2 B_{n,i-1}(p)\right]
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
H_{n+1} &= (n+1)^2 p^{n+1} + (1-p)\left[np(1-p) + n^2p^2\right] + p\left[\sum_{i=1}^{n} i^2 B_{n,i-1}(p)\right] \\
&= (n+1)^2 p^{n+1} + (1-p)\left[np(1-p) + n^2p^2\right] + p\sum_{j=0}^{n-1} (j+1)^2 B_{n,j}(p) \\
&= (n+1)^2 p^{n+1} + (1-p)\left[np(1-p) + n^2p^2\right] + p\left[\sum_{j=0}^{n} (j+1)^2 B_{n,j}(p)\right] \\
&\quad - p(n+1)^2 p^n
\end{aligned}$$

En développant $(j+1)^2$:

$$H_{n+1} = (1-p)\left[np(1-p)+n^2p^2\right] + p\left[\sum_{j=0}^{n} j^2 B_{n,j}(p)\right] + 2p\left[\sum_{j=0}^{n} jB_{n,j}(p)\right] + p\left[\sum_{j=0}^{n} B_{n,j}(p)\right]$$

D'après l'hypothèse de récurrence et des résultats précédents :

$$\begin{aligned} H_{n+1} &= (1-p)\left[np(1-p)+n^2p^2\right] + p\left[np(1-p)+n^2p^2\right] + 2pnp + p \\ &= \left[np(1-p)+n^2p^2\right] + 2np^2 + p \\ &= (n+1)p(1-p) + (n+1)^2p^2 \end{aligned}$$

Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

Nous avons démontré par récurrence que, quelque soit $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{i=0}^{n} i^2 B_{n,i}(p) = np(1-p) + n^2p^2.$$

Démontrons que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^2 B_{n,i}(p) = np(1-p) + n^2p^2$.

Utilisons l'astuce précédemment consistant à dérivée la formule du binôme.

Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $(x,b) \in \mathbb{R}$. La formule du binôme de Newton s'énonce
$$(x+n)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i b^{n-i}.$$

En dérivant deux fois chaque membre par rapport à x :
$$n(n-1)(x+b)^{n-2} = \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} i(i-1)x^{i-2}b^{n-i}$$

D'où
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i(i-1)x^i b^{n-i} = n(n-1)(x^2)(x+b)^{n-2}.$$

Pour $x = p$ et $b = 1-p$

$$\sum_{i=0}^{n} i(i-1)B_{n,i}(p) = n(n-1)p^2$$

qui équivaut successivement à :

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 B_{n,i}(p) = n(n-1)p^2 + \sum_{i=0}^{n} iB_{n,i}(p)$$
$$\sum_{i=0}^{n} i^2 B_{n,i}(p) = n(n-1)p^2 + np$$

Ce résultat restant valable pour $n = 0$ ou $n = 1$:

Nous avons démontré que, quelque soit $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{i=0}^{n} i^2 B_{n,i}(p) = np(1-p) + n^2p^2.$$

Partie B : des courbes de Bézier.

Dans cette partie les questions sont liées à des questions de barycentres et de convexité.

1. (a) Déterminons la courbe de Bézier.

$$\overrightarrow{OM(p)} = \sum_{i=0}^{0} B_{0,0}\overrightarrow{OP_0}$$

autrement dit

$$\overrightarrow{OM(p)} = \overrightarrow{OA}.$$

La courbe de Bézier est réduite au point A.

(b) Déterminons la courbe de Bézier.

L'égalité vectorielle devient

$$\overrightarrow{OM(p)} = B_{1,0}(p)\overrightarrow{OB} + B_{1,1}(p)\overrightarrow{OC}$$

Ce qui équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM(p)} &= p\overrightarrow{OB} + (1-p)\overrightarrow{OC} \\
\overrightarrow{OM(p)} &= p\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}\right) + (1-p)\overrightarrow{OC} \\
\overrightarrow{OM(p)} &= p\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{OC} \\
\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OM(p)} &= p\overrightarrow{CB} \\
\overrightarrow{CM(p)} &= p\overrightarrow{CB}
\end{aligned}$$

Et puisque $p \in [0;1]$ nous en déduisons que

$$\boxed{\text{la courbe de Bézier est } [BC].}$$

2. (a) Montrons que A et C appartiennent à la courbe de Bézier.

Nous avons

$$\overrightarrow{OM(p)} = B_{2,0}(p)\overrightarrow{OA} + B_{2,1}(p)\overrightarrow{OB} + B_{2,2}(p)\overrightarrow{OC}$$

i.e.

$$\overrightarrow{OM(p)} = p^2\overrightarrow{OA} + 2p(1-p)\overrightarrow{OB} + (1-p)^2\overrightarrow{OC}$$

En particulier pour $p = 1$

$$\overrightarrow{OM(1)} = \overrightarrow{OA}$$

et pour $p = 0$

$$\overrightarrow{OM(0)} = \overrightarrow{OC}$$

$$\boxed{\text{Par conséquent } A \text{ et } C \text{ appartiennent à la courbe de Bézier.}}$$

Montrons en raisonnant par l'absurde que B n'appartient pas à la courbe.

Supposons que B appartienne à la courbe et démontrons que cela conduit à une absurdité.

Si B appartient à la courbe alors il existe $p_0 \in [0;1]$ tel que

$$\overrightarrow{OB} = B_{2,0}(p_0)\overrightarrow{OA} + B_{2,1}(p_0)\overrightarrow{OB} + B_{2,2}(p_0)\overrightarrow{OC}$$

ce qui équivaut successivement à

$$\overrightarrow{OB} = B_{2,0}(p_0)(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}) + B_{2,1}(p_0)\overrightarrow{OB} + B_{2,2}(p_0)(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC})$$
$$\overrightarrow{OB} = [B_{2,0}(p_0) + B_{2,1}(p_0) + B_{2,2}(p_0)]\,\overrightarrow{OB} + B_{2,0}(p_0)\overrightarrow{BA}) + B_{2,2}(p_0)\overrightarrow{BC}$$

d'après la question A-4 :

$$\vec{0} = B_{2,0}(p_0)\overrightarrow{BA} + B_{2,2}(p_0)\overrightarrow{BC}$$

Ainsi $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires donc A, B et C sont alignés. Ce qui est impossible par construction.

Nous avons démontré que B n'appartient pas à la courbe de Bézier.

(b) Traçons la courbe.

Considérons les matrices colonnes associées aux vecteurs proposés dans la base canonique. L'égalité

$$\overrightarrow{OM(p)} = \sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(p)\overrightarrow{OP_i}$$

devient alors

$$\begin{pmatrix} x(p) \\ y(p) \end{pmatrix} = p^2 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + p(1-p)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (1-p)^2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

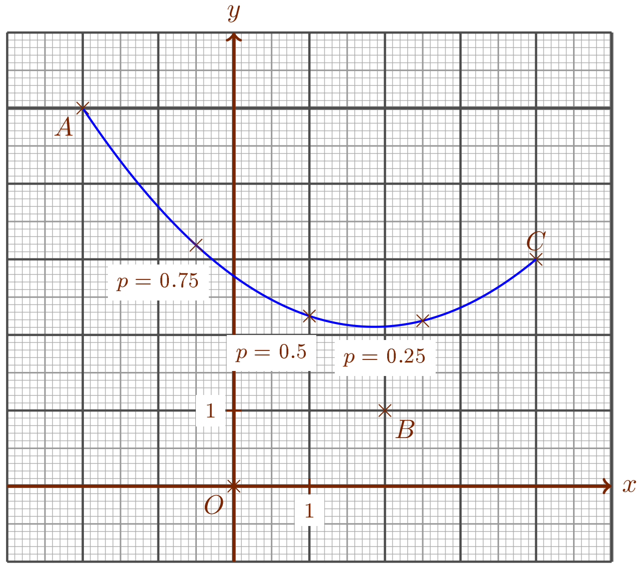
Ce qui conduit à la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(p) = -2p^2 + 2p(1-p) + 4(1-p)^2 \\ y(p) = 5p^2 + p(1-p) + 3(1-p)^2 \end{cases}$$

Autrement dit :

$$\begin{cases} x(p) = -6p + 4 \\ y(p) = p^2 - 5p + 3 \end{cases}$$

Nous reconnaissons la représentation paramétrique d'une parabole en exprimant y en fonction de x.
Pour placer les points demandés il suffit de donner à p les valeurs proposées dans le précédent système.



3. La notion de barycentre n'est plus au programme du lycée. Je ne vois cependant pas d'autre approche.

   Soit $p \in [0;1]$.
   Par construction $M(p)$ est le barycentre du système de points pondérés $\{(A,p^2),(B,2p(1-p)),(C,(1-p)^2)\}$.
   Les coefficients $B_{n,i}(p)$ étant tous positifs d'après A.3.(b), nous en déduisons que le barycentre du système est dans l'enveloppe convexe des trois points A, B et C. Autrement dit $M(p)$ est dans le triangle ABC.
   Ceci étant vrai pour tout $p \in [0;1]$

   la courbe est nécessairement inscrite dans ABC.

4. Les points A, B et C ne sont pas alignés nous pouvons donc considérer le repère (B,A,C) du plan.

$$\overrightarrow{OM(p)} = \sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(p)\overrightarrow{OP_i}$$

Donc avec les trois points A, B et C :

$$\overrightarrow{OM(p)} = p^2\overrightarrow{OA} + 2p(1-p)\overrightarrow{OB} + (1-p)^2\overrightarrow{OC}$$

D'après la relation de Chasles et puisque $B_{2,0}(p) + B_{2,1}(p) + B_{2,2}(p) = 1$:

$$\overrightarrow{BM(p)} = p^2\overrightarrow{BA} + 2p(1-p)\overrightarrow{BB} + (1-p)^2\overrightarrow{BC}$$

Dans le repère (B,A,C) nous avons donc :

$$\begin{pmatrix} x(p) \\ y(p) \end{pmatrix} = p^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-p)^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{cases} x(p) = p^2 \\ y(p) = (1-p)^2 \end{cases}$$

Donc $y = x \pm 2\sqrt{x} + 1$ et $x \in [0;1]$.
Quitte à faire un changement de variable : $y = X^2 + 2X + 1$, $X \in [0;1]$. Il s'agit de l'équation d'un arc de parabole.

$$\boxed{\text{La courbe de Bézier de degré 2 est un arc de parabole.}}$$

II Problème : un si discret Monsieur Dirichlet.

Le prénom Gustav est probablement choisi en référence à Dirichlet tandis que Maryam l'est pour Maryam Mirzakhani mathématicienne décédée en 2017.

Partie A : quelques exemples pour commencer.

1.
2. Notons b et c les nombres associés respectivement à B et C.
   B et C sont bleus donc $b = \frac{1}{2}(a+b)$ et $c = b$.
   Nécessairement : $a = b = c$.
   On vérifie aisément que, réciproquement, si $a = b = c$ cela convient.

$$\boxed{\text{Il faut attribuer le nombre } a \text{ aux points } B \text{ et } C.}$$

(a) Comme précédemment, avec des notations semblables, nous devons avoir

$$\begin{cases} b = \frac{1}{2}(a+c) \\ c = \frac{1}{2}(b+d) \\ d = \frac{1}{2}(c+e) \end{cases}$$

Nous en déduisons

$$c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}(c+e)\right).$$

Et donc

$$c = \frac{1}{2}(a+e).$$

Nous en déduisons

$$\begin{cases} b = \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}e \\ d = \frac{1}{4}a + \frac{3}{4}e \end{cases}$$

Réciproquement nous vérifions que ces valeurs conviennent.

$$\boxed{\begin{cases} b = \dfrac{3}{4}a + \dfrac{1}{4}e \\ c = \dfrac{1}{2}a + \dfrac{1}{2}e \\ d = \dfrac{1}{4}a + \dfrac{3}{4}e \end{cases}}$$

Remarquons que nous pouvons retrouver la somme des nombres associés aux nœuds grâce à la matrice d'adjacence du graphe

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{d(A)} & \frac{1}{d(B)} & \frac{1}{d(C)} & \frac{1}{d(D)} & \frac{1}{d(E)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d(A)}b \\ \frac{1}{d(B)}(a+c) \\ \frac{1}{d(C)}(b+d) \\ \frac{1}{d(D)}(c+e) \\ \frac{1}{d(E)}d \end{pmatrix}$$

(b) Exprimons b, c et d en fonction de a et e.

Comme précédemment, avec des notations semblables, nous devons avoir

$$\begin{cases} b = \frac{1}{2}(a+c) \\ c = \frac{1}{3}(b+d+e) \\ d = \frac{1}{3}(a+c+e) \end{cases}$$

Donc

$$c = \frac{1}{3}(b + d + e)$$

équivaut successivement à

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{3}(a+c+e) + e\right) \\ c &= \frac{5}{18}(a+c) + \frac{4}{9}e \\ c &= \frac{5}{13}a + \frac{8}{13}e \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2}a + \frac{5}{26}a + \frac{4}{13}e \\ &= \frac{18}{26}a + \frac{4}{13}e \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{3}a + \frac{5}{39}a + \frac{8}{39}e + \frac{1}{3}e \\ &= \frac{18}{39}a + \frac{21}{39}e \end{aligned}$$

On peut vérifier qu'effectivement ces valeurs conviennent :

$$\boxed{\begin{cases} b = \dfrac{9}{13}a + \dfrac{4}{13}e \\ c = \dfrac{5}{13}a + \dfrac{8}{13}e \\ d = \dfrac{6}{13}a + \dfrac{7}{13}e \end{cases}}$$

Nous pouvions également démontrer ce résultat en procédant à des combinaison linéaires sur les lignes du système.

$$\begin{cases} b = \dfrac{1}{2}(a+c) \\ c = \dfrac{1}{3}(b+d+e) \\ d = \dfrac{1}{3}(a+c+e) \end{cases}$$

équivaut successivement à

$$\begin{cases} 2b - c = a \\ -b + 3c - d = c \\ -c + 3d = a + e \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b - c = a \\ 5c - 2d = 2e + a \\ -c + 3d = a + e \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_1 + 2L_2$$

$$\begin{cases} 2b - c = a \\ 5c - 2d = 2e + a \\ 13d = 6a + 7e \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_2 + 5L_3$$

$$\begin{cases} 2b - c = a \\ 5c - 2d = 2e + a \\ d = \frac{6}{13}a + \frac{7}{13}e \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow \frac{1}{13}L_3$$

$$\begin{cases} 2b - c = a \\ 5c = \frac{25}{13}a + \frac{40}{13}e \\ d = \frac{6}{13}a + \frac{7}{13}e \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$$

$$\begin{cases} 2b - c = a \\ c = \frac{5}{13}a + \frac{8}{13}e \\ d = \frac{6}{13}a + \frac{7}{13}e \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2$$

$$\begin{cases} 2b = \frac{18}{13}a + \frac{8}{13}e \\ c = \frac{5}{13}a + \frac{8}{13}e \\ d = \frac{6}{13}a + \frac{7}{13}e \end{cases} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\begin{cases} b = \frac{9}{13}a + \frac{4}{13}e \\ c = \frac{5}{13}a + \frac{8}{13}e \\ d = \frac{6}{13}a + \frac{7}{13}e \end{cases} \qquad L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$$

(c) En raisonnant comme précédemment nous obtenons que b, c et d sont solutions du système

$$\begin{cases} 4b-c-d=a+e \\ -b+4c-d=a+e \\ -b-c+4d=a+e \end{cases}$$

3.

Partie B : étude du cas général.

1. (a)
   (b)
2.
3.
4.
5. (a)
   (b)
   (c)
6.

III Problème : les nombres en or.

Partie A : tous les entiers naturels sont en or.

1.
2.
3.
4.

Partie B : représentation en or pur.

1.
2. (a)
   (b)
3. (a)
   (b)
   (c)
4.
5.