Concours général de mathématique s 2018.

Durée : 5 heures.
La calculatrice est autorisée conformément à la réglementation.
La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

I Problème : approximations de courbes.

Partie A : les polynômes de Bernstein.

Pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel i compris entre 0 et n, on note $B_{n,i}$ le polynôme défini pour p variant dans l'intervalle $[0;1]$ par

$$B_{n,i}(p) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i},$$

avec $\binom{n}{i}$ le coefficient binomial, i parmi n. Ainsi $B_{0,0}(p) = 1$, $B_{1,0}(p) = 1 - p$ et $B_{1,1}(p) = p$.

Ces polynômes sont appelés ***polynômes de Bernstein***.

Dans cette partie il s'agit de retrouver des résultats de probabilité concernant une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

1. (a) Donner l'expression de $B_{2,0}(p)$, $B_{2,1}(p)$ et $B_{2,2}(p)$.

Rappelons que les coefficients binomiaux peuvent se retrouver avec la formule

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!},$$

où $n! = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ est appelé factorielle n avec la convention $0! = 1$.

Il est aussi possible de les retrouver en utilisant le triangle de Pascal que nous construisons grâce à la formule de Pascal

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1}$$

	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Déterminons les polynômes de Bernstein pour $n = 2$.

$$\begin{aligned} B_{2,0}(p) &= \binom{2}{0} p^0 (1-p)^{2-0} \\ &= \frac{2!}{(2-0)!0!}(1-p)^2 \\ &= p^2 - 2p + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{2,1}(p) &= \binom{2}{1} p^1 (1-p)^{2-1} \\ &= \frac{2!}{(2-1)!1!} p(1-p) \\ &= -2p^2 + 2p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{2,2}(p) &= \binom{2}{2} p^2 (1-p)^{2-2} \\ &= \frac{2!}{2!(2-2)!} p^2 \\ &= p^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} B_{2,0}(p) &= p^2 - 2p + 1 \\ B_{2,1}(p) &= -2p^2 + 2p \\ B_{2,2}(p) &= p^2 \end{aligned}}$$

(b) Déterminer l'expression des polynôme des Bernstein pour $n = 3$, à savoir $B_{3,0}(p)$, $B_{3,1}(p)$, $B_{3,2}(p)$ et $B_{3,3}(p)$.

Déterminons les polynômes de Bernstein pour $n = 3$.

$$\begin{aligned} B_{3,0}(p) &= (1-p)^3 \\ &= -p^3 + 3p^2 - 3p + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_{3,1}(p) &= 3p(1-p)^2 \\ &= 3p^3 - 6p^2 + 3p\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_{3,2}(p) &= 3p^2(1-p) \\ &= -3p^3 + 3p^2\end{aligned}$$

$$B_{3,3}(p) = p^3$$

$$\boxed{\begin{aligned}&B_{3,0}(p) = -p^3 + 3p^2 - 3p + 1 \\ &B_{3,1}(p) = 3p^3 - 6p^2 + 3p \\ &B_{3,2}(p) = -3p^3 + 3p^2 \\ &B_{3,3}(p) = p^3\end{aligned}}$$

2. (a) Quelle est l'expression de $B_{n,0}(p)$ et de $B_{n,n}(p)$?

Puisque $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ le résultat est clair.

$$\begin{aligned}B_{n,0}(p) &= \binom{n}{0} p^0(1-p)^{n-0} \\ &= (1-p)^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_{n,n}(p) &= \binom{n}{n} p^n(1-p)^{n-n} \\ &= p^n\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&B_{n,0}(p) = (1-p)^n \\ &B_{n,0}(p) = p^n\end{aligned}}$$

(b) Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout i compris entre 1 et $n-1$,

$$B_{n,i}(p) = (1-p)B_{n-1,i}(p) + pB_{n-1,i-1}(p).$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et i un entier naturel tel que $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

$$\begin{aligned}
&(1-p)B_{n-1,i}(p) + pB_{n-1,i_1}(p)\\
&= (1-p)\binom{n-1}{i}p^i(1-p)^{n-1-i} + p\binom{n-1}{i-1}p^{i-1}(1-p)^{n-1-(i-1)}\\
&= \binom{n-1}{i-1}p^i(1-p)^{n-i} + \binom{n-1}{i-1}p^i(1-p)^{n-i}\\
&= \left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\right]p^i(1-p)^{n-i}\\
&= \binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}, \quad \text{d'après la formule de Pascal}\\
&= B_{n,i}(p)
\end{aligned}$$

Nous avons donc démontré que

$$\boxed{\begin{gathered}\text{quelque soient } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } i \in [\![1,n-1]\!],\\ B_{n,i}(p) = (1-p)B_{n-1,i}(p) + pB_{n-1,i-1}(p).\end{gathered}}$$

3. (a) En quelle(s) valeur(s) $p \in [0;1]$ s'annule un polynôme de Bernstein ?
On raisonnera en distinguant les cas selon les valeurs de n et de i.

Déterminons les racines des $B_{n,i}$.

* Si $n = 0$, alors $B_{0,0}(p) = 1$ ne s'annule pas.
* Si $n = 1$ et
  — si $i = 0$, alors $B_{1,0}(p) = 1-p$ s'annule en 1 uniquement.
  — si $i = 1$, alors $B_{1,1}(p) = p$ s'annule en 0 uniquement.
* Si $n > 1$ et
  — si $i = 0$, alors $B_{n,0}(p) = (1-p)^n$ s'annule en 1 uniquement.
  — si $i = 1$, alors $B_{n,n}(p) = p^n$ s'annule en 0 uniquement.
  — si $i \in [\![1,n-1]\!]$, alors $B_{n,i} = \binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$ admet deux racines distinctes : 0 et 1.

(b) Qu'en est-il de son signe sur $[0;1]$?

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![0,n]\!]$.
$\binom{n}{i} > 0$, et, pour tout $p \in [0;1]$, $p^i > 0$ et $(1-p)^{n-i} > 0$. Le produit de ces trois facteurs est donc encore strictement positif.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall i \in [\![0,n]\!],\ \forall p \in [0;1],\ B_{n,i}(p) > 0.}$$

4. Démontrer que les polynômes de Bernstein d'un même degré n forment une partition de l'unité : c'est-à-dire, que pour tout entier naturel n,

$$\sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(p) = B_{n,0}(p) + B_{n,1}(p) + \cdots + B_{n,n-1}(p) + B_{n,n}(p) = 1.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Notons $P(n)$: « $\sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(p) = 1$ ».

Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

(a) Initialisation.
Démontrons que $P(0)$ est vraie.

$$\begin{aligned} B_{0,0}(p) &= \binom{0}{0} p^0 (1-p)^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc $P(0)$ est vraie.

(b) Hérédité.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons que $P(n)$ est vraie et démontrons que $P(n+1)$ est vraie.
Soit $p \in [0;1]$.

Notons

$$S_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} B_{n+1,i}(p)$$

Donc :

$$S_{n+1} = B_{n+1,0}(p) + B_{n+1,n+1}(p) + \sum_{i=1}^{n} B_{n+1,i}(p)$$

D'après la question 2.b :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= (1-p)^{n+1} + p^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} [(1-p)B_{n,i}(p) + pB_{n,i-1}(p)] \\ &= (1-p)^{n+1} + p^{n+1} + (1-p)\left[\sum_{i=1}^{n} B_{n,i}(p)\right] + p\left[\sum_{i=1}^{n} B_{n,i-1}(p)\right] \\ &= (1-p)^{n+1} + p^{n+1} + (1-p)\left[\sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(p)\right] - (1-p)B_{n,0}(p) \\ &\quad + p\left[\sum_{j=0}^{n-1} B_{n,j}(p)\right] \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence :

$$S_{n+1} = (1-p)^{n+1} + p^{n+1} + (1-p) - (1-p)^{n+1} + p\left[\sum_{j=0}^{n} B_{n,j}(p)\right] \\ - pB_{n,n}(p)$$

Par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} &= p^{n+1} + (1-p) + p - p^{n+1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Nous avons démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(p) = 1.$$

Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(p) = 1$.

Démonstration alternative et plus élégante en utilisant la formule du binôme de Newton qui est hors programme.

Pour a et b des réels (ou des complexes) et n une entier naturel :

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

En particulier pour $a = p$ et $b = 1 - p$

$$\sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(p) = 1 = 1.$$

5. Déterminer la valeur des sommes

$$\sum_{i=0}^{n} i B_{n,i}(p) \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{n} i^2 B_{n,i}(p).$$

Que représentent ces sommes en termes probabilistes ?

Le plus simple est évidemment d'adopter un point de vue probabiliste. Mais l'énoncé semble vouloir démontrer ces résultats de probabilité nous préférerons donc une autre approche.

$\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i B_{n,i}(p)$ et $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^2 B_{n,i}(p)$ sont respectivement l'espérance et le moment d'ordre deux d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.

Cela nous permet de conjecturer les résultats à démontrer. En effet si X suit une loi binomiale de paramètre n et p, alors $E(X) = np$ et puisque $V(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = np(1-p)$, le moment d'ordre deux est $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = np(1-p) + n^2p^2$.

Démontrons que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i B_{n,i}(p) = np$.

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: « $\sum_{i=0}^{n} i B_{n,i}(p) = np$ ».

* $P(0) =$ est évidemment vraie.
* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et démontrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie.

Notons :

$$\begin{aligned}
T_{n+1} &= \sum_{i=0}^{n+1} iB_{n+1,i}(p) \\
&= (n+1)B_{n+1,n+1}(p) + \sum_{i=1}^{n} iB_{n+1,i}(p) \\
&= (n+1)p^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} i(1-p)B_{n,i}(p) + ipB_{n,i-1}(p) \\
&= (n+1)p^{n+1} + (1-p)\left[\sum_{i=1}^{n} iB_{n,i}(p)\right] + p\left[\sum_{i=1}^{n} iB_{n,i-1}(p)\right]
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
T_{n+1} &= (n+1)p^{n+1} + (1-p)np + p\left[\sum_{i=1}^{n} iB_{n,i-1}(p)\right] \\
&= (n+1)p^{n+1} + (1-p)np + p\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)B_{n,j}(p) \\
&= (n+1)p^{n+1} + (1-p)np + p\left[\sum_{j=0}^{n}(j+1)B_{n,j}(p)\right] - p(n+1)p^{n} \\
&= (1-p)np + p\left[\sum_{j=0}^{n} jB_{n,j}(p)\right] + p\left[\sum_{i=0}^{n} B_{n,j}(p)\right]
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence et la question 4 :

$$\begin{aligned}
T_{n+1} &= (1-p)np + pnp + p \\
&= np - np^2 + np^2 + p \\
&= (n+1)p
\end{aligned}$$

Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

Nous avons démontré par récurrence que, quelque soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} iB_{n,i}(p) = np.$$

Démontrons que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} iB_{n,i}(p) = np$.

Encore une démonstration plus rapide et plus élégante utilisant la formule du binôme.

Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x,b) \in \mathbb{R}^2$ nous avons

$$(x+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i b^{n-i}$$

De part et d'autre du signe d'égalité nous voyons des fonctions polynomiales de la variable x, donc dérivables sur $\mathbb{R}$ et en dérivant :

$$n(x+b)^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} i x^{i-1} b^{n-i}$$

En multipliant terme à terme par x

$$nx(x+b)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} i x^i b^{n-i}$$

Enfin

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i x^i b^{n-i} = nx(x+b)^n$$

Donc pour $x = p$ et $b = 1 - p$,

$$\sum_{i=0}^{n} iB_{n,i}(p) = np$$

Ce qui reste valable pour $n = 0$ donc :

$$\boxed{\text{nous avons démontré que } n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{n} iB_{n,i}(p) = np.}$$

Démontrons par récurrence que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^2 B_{n,i}(p) = np(1-p) + n^2p^2$.

Notons $P(n)$: « $\sum_{i=0}^{n} i^2 B_{n,i}(p) = np(1-p) + n^2p^2$ quelque soit $n \in \mathbb{N}$.

* $P(0)$ est trivialement vraie.

* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et démontrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie.

Notons :

$$\begin{aligned}
H_{n+1} &= \sum_{i=0}^{n+1} i^2 B_{n+1,i}(p) \\
&= (n+1)^2 B_{n+1,n+1}(p) + \sum_{i=1}^{n} i^2 B_{n+1,i}(p) \\
&= (n+1)^2 p^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} i^2(1-p)B_{n,i}(p) + i^2 p B_{n,i-1}(p) \\
&= (n+1)^2 p^{n+1} + (1-p)\left[\sum_{i=1}^{n} i^2 B_{n,i}(p)\right] + p\left[\sum_{i=1}^{n} i^2 B_{n,i-1}(p)\right]
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
H_{n+1} &= (n+1)^2 p^{n+1} + (1-p)\left[np(1-p) + n^2p^2\right] + p\left[\sum_{i=1}^{n} i^2 B_{n,i-1}(p)\right] \\
&= (n+1)^2 p^{n+1} + (1-p)\left[np(1-p) + n^2p^2\right] + p\sum_{j=0}^{n-1} (j+1)^2 B_{n,j}(p) \\
&= (n+1)^2 p^{n+1} + (1-p)\left[np(1-p) + n^2p^2\right] + p\left[\sum_{j=0}^{n} (j+1)^2 B_{n,j}(p)\right] \\
&\quad - p(n+1)^2 p^n
\end{aligned}$$

En développant $(j+1)^2$:

$$\begin{aligned}
H_{n+1} &= (1-p)\left[np(1-p) + n^2p^2\right] + p\left[\sum_{j=0}^{n} j^2 B_{n,j}(p)\right] + 2p\left[\sum_{j=0}^{n} j B_{n,j}(p)\right] \\
&\quad + p\left[\sum_{j=0}^{n} B_{n,j}(p)\right]
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence et des résultats précédents :

$$\begin{aligned} H_{n+1} &= (1-p)\left[np(1-p)+n^2p^2\right]+p\left[np(1-p)+n^2p^2\right]+2pnp+p \\ &= \left[np(1-p)+n^2p^2\right]+2np^2+p \\ &= (n+1)p(1-p)+(n+1)^2p^2 \end{aligned}$$

Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

Nous avons démontré par récurrence que, quelque soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 B_{n,i}(p) = np(1-p)+n^2p^2.$$

Démontrons que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^2 B_{n,i}(p) = np(1-p)+n^2p^2$.

Utilisons l'astuce précédemment consistant à dérivée la formule du binôme.

Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, $(x,b) \in \mathbb{R}$. La formule du binôme de Newton s'énonce

$$(x+n)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i b^{n-i}.$$

En dérivant deux fois chaque membre par rapport à x :

$$n(n-1)(x+b)^{n-2} = \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} i(i-1)x^{i-2}b^{n-i}$$

D'où

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i(i-1)x^i b^{n-i} = n(n-1)(x^2)(x+b)^{n-2}.$$

Pour $x = p$ et $b = 1-p$

$$\sum_{i=0}^{n} i(i-1)B_{n,i}(p) = n(n-1)p^2$$

qui équivaut successivement à :

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 B_{n,i}(p) = n(n-1)p^2 + \sum_{i=0}^{n} iB_{n,i}(p)$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 B_{n,i}(p) = n(n-1)p^2 + np$$

Ce résultat restant valable pour $n = 0$ ou $n = 1$:

Nous avons démontré que, quelque soit $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{i=0}^{n} i^2 B_{n,i}(p) = np(1-p) + n^2p^2.$$

Partie B : des courbes de Bézier.

On munit le plan d'un repère orthonormé (O,I,J). Soit n un entier naturel. On se donne $n+1$ points non alignés du plan P_0, P_1, $\ldots$, P_{n-1}, P_n.

On appelle ***courbe de Bézier*** de degré n et de points de contrôle P_0, P_1, $\ldots$, P_{n-1}, P_n l'ensemble des points $M(p)$ du plan avec p variant dans l'intervalle $[0;1]$ tels que

$$\overrightarrow{OM(p)} = \sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(p)\overrightarrow{OP_i}.$$

Dans la suite on va s'intéresser à des courbes de Bézier de degré 0, 1 ou 2.

On se fixe donc A, B, C trois points du plan non alignés.

Dans cette partie les questions sont liées à des questions de barycentres et de convexité.

1. Reconnaître la nature géométrique

   (a) de la courbe de Bézier de degré 0 et de point de contrôle A.

   Déterminons la courbe de Bézier.

   $$\overrightarrow{OM(p)} = \sum_{i=0}^{0} B_{0,0}\overrightarrow{OP_0}$$

   autrement dit
   $$\overrightarrow{OM(p)} = \overrightarrow{OA}.$$

   La courbe de Bézier est réduite au point A.

   (b) de la courbe de Bézier de degré 1 et de points de contrôle B et C.

   Déterminons la courbe de Bézier.

   L'égalité vectorielle devient

$$\overrightarrow{OM(p)} = B_{1,0}(p)\overrightarrow{OB} + B_{1,1}(p)\overrightarrow{OC}$$

Ce qui équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM(p)} &= p\overrightarrow{OB} + (1-p)\overrightarrow{OC} \\
\overrightarrow{OM(p)} &= p\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}\right) + (1-p)\overrightarrow{OC} \\
\overrightarrow{OM(p)} &= p\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{OC} \\
\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OM(p)} &= p\overrightarrow{CB} \\
\overrightarrow{CM(p)} &= p\overrightarrow{CB}
\end{aligned}$$

Et puisque $p \in [0;1]$ nous en déduisons que

$$\boxed{\text{la courbe de Bézier est } [BC].}$$

2. On s'intéresse à une courbe de Bézier de degré 2 et de points de contrôle A, B et C.

   (a) Justifier que les points A et C appartiennent à cette courbe. Le point B y appartient-il ?

   Montrons que A et C appartiennent à la courbe de Bézier.

   Nous avons

$$\overrightarrow{OM(p)} = B_{2,0}(p)\overrightarrow{OA} + B_{2,1}(p)\overrightarrow{OB} + B_{2,2}(p)\overrightarrow{OC}$$

   i.e.

$$\overrightarrow{OM(p)} = p^2\overrightarrow{OA} + 2p(1-p)\overrightarrow{OB} + (1-p)^2\overrightarrow{OC}$$

   En particulier pour $p = 1$

$$\overrightarrow{OM(1)} = \overrightarrow{OA}$$

   et pour $p = 0$

$$\overrightarrow{OM(0)} = \overrightarrow{OC}$$

Par conséquent A et C appartiennent à la courbe de Bézier.

Montrons en raisonnant par l'absurde que B n'appartient pas à la courbe.

Supposons que B appartienne à la courbe et démontrons que cela conduit à une absurdité.
Si B appartient à la courbe alors il existe $p_0 \in [0;1]$ tel que

$$\overrightarrow{OB} = B_{2,0}(p_0)\overrightarrow{OA} + B_{2,1}(p_0)\overrightarrow{OB} + B_{2,2}(p_0)\overrightarrow{OC}$$

ce qui équivaut successivement à

$$\overrightarrow{OB} = B_{2,0}(p_0)(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}) + B_{2,1}(p_0)\overrightarrow{OB} + B_{2,2}(p_0)(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC})$$
$$\overrightarrow{OB} = [B_{2,0}(p_0) + B_{2,1}(p_0) + B_{2,2}(p_0)]\,\overrightarrow{OB} + B_{2,0}(p_0)\overrightarrow{BA}) + B_{2,2}(p_0)\overrightarrow{BC}$$

d'après la question A-4 :

$$\vec{0} = B_{2,0}(p_0)\overrightarrow{BA} + B_{2,2}(p_0)\overrightarrow{BC}$$

Ainsi $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires donc A, B et C sont alignés. Ce qui est impossible par construction.

Nous avons démontré que B n'appartient pas à la courbe de Bézier.

(b) Dans cette question on prend des points de coordonnées $A(-2;5)$, $B(2;1)$ et $C(4;3)$. Proposer une construction des points de cette courbe pour $p = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{2}$ et $p = \frac{3}{4}$. Tracer la courbe à main levée.

Traçons la courbe.

Considérons les matrices colonnes associées aux vecteurs proposés dans la base canonique. L'égalité

$$\overrightarrow{OM(p)} = \sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(p)\overrightarrow{OP_i}$$

devient alors

$$\begin{pmatrix} x(p) \\ y(p) \end{pmatrix} = p^2 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + p(1-p) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (1-p)^2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

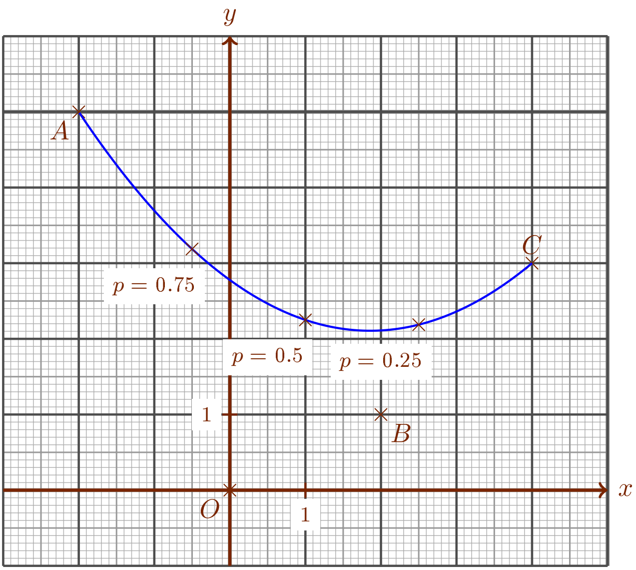
Ce qui conduit à la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(p) = -2p^2 + 2p(1-p) + 4(1-p)^2 \\ y(p) = 5p^2 + p(1-p) + 3(1-p)^2 \end{cases}$$

Autrement dit :

$$\begin{cases} x(p) = -6p + 4 \\ y(p) = p^2 - 5p + 3 \end{cases}$$

Nous reconnaissons la représentation paramétrique d'une parabole en exprimant y en fonction de x.
Pour placer les points demandés il suffit de donner à p les valeurs proposées dans le précédent système.



3. Démontrer que cette courbe est nécessairement inscrite dans le triangle ABC.

La notion de barycentre n'est plus au programme du lycée. Je ne vois cependant pas d'autre approche.

Soit $p \in [0; 1]$.

Par construction $M(p)$ est le barycentre du système de points pondérés $\{(A,p^2),(B,2p(1-p)),(C,(1-p)^2)\}$.
Les coefficients $B_{n,i}(p)$ étant tous positifs d'après A.3.(b), nous en déduisons que le barycentre du système est dans l'enveloppe convexe des trois points A, B et C. Autrement dit $M(p)$ est dans le triangle ABC.
Ceci étant vrai pour tout $p \in [0;1]$

la courbe est nécessairement inscrite dans ABC.

4. Quelle pourrait être la nature géométrique de cette courbe de Bézier de degré 2 ? Justifier votre réponse.

Les points A, B et C ne sont pas alignés nous pouvons donc considérer le repère (B,A,C) du plan.

$$\overrightarrow{OM(p)} = \sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(p)\overrightarrow{OP_i}$$

Donc avec les trois points A, B et C :

$$\overrightarrow{OM(p)} = p^2\overrightarrow{OA} + 2p(1-p)\overrightarrow{OB} + (1-p)^2\overrightarrow{OC}$$

D'après la relation de Chasles et puisque $B_{2,0}(p) + B_{2,1}(p) + B_{2,2}(p) = 1$:

$$\overrightarrow{BM(p)} = p^2\overrightarrow{BA} + 2p(1-p)\overrightarrow{BB} + (1-p)^2\overrightarrow{BC}$$

Dans le repère (B,A,C) nous avons donc :

$$\begin{pmatrix} x(p) \\ y(p) \end{pmatrix} = p^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-p)^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{cases} x(p) = p^2 \\ y(p) = (1-p)^2 \end{cases}$$

Donc $y = x \pm 2\sqrt{x} + 1$ et $x \in [0;1]$.
Quitte à faire un changement de variable : $y = X^2 + 2X + 1$, $X \in [0;1]$. Il s'agit de l'équation d'un arc de parabole.

La courbe de Bézier de degré 2 est un arc de parabole.

II Problème : un si discret Monsieur Dirichlet.

Soit $\mathscr{S}$ un ensemble fini non vide de points du plan. Certaines paires de points de $\mathscr{S}$ sont reliées par des traits, éventuellement en plusieurs étapes, il est toujours possible de passer d'un point à n'importe quel autre (les intersections éventuelles entre les traits ne sont pas considérées et un point n'est jamais relié à lui-même).

Deux points de $\mathscr{S}$ reliés par un trait sont dit ***voisins***.

Si M est un point de $\mathscr{S}$, on note $V(M)$ l'ensemble des voisins de M, et on note $d(M)$ le nombre de voisins de M, appelé le ***degré*** de M.

Chaque point de $\mathscr{S}$ a été colorié soit en bleu soit en jaune, et il y a au moins un point jaune dans l'ensemble $\mathscr{S}$. À chaque point jaune, Gustav a attribué un nombre réel de son choix. La mathématicienne Maryam voudrait alors attribuer un réel à chaque point bleu (pas forcément le même nombre d'un point bleu à un autre) de façon à satisfaire la propriété suivante :

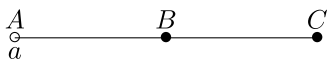
($\mathscr{P}$) **Le nombre attribué à tout point bleu est la moyenne des nombres attribués à ses voisins.**

Le prénom Gustav est probablement choisi en référence à Dirichlet tandis que Maryam l'est pour Maryam Mirzakhani mathématicienne décédée en 2017.

Le titre indique que nous allons étudier une version discrète du problème de Dirichlet.

Partie A : quelques exemples pour commencer.

1. Dans cette question uniquement, on suppose que $\mathscr{S} = \{A,B,C\}$, avec A voisin de B, lui-même voisin de C comme sur le dessin ci-dessous.



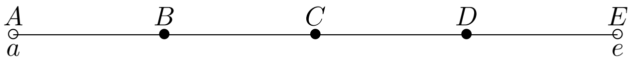
De plus A est le seul point jaune et Gustav lui a attribué le réel a.
Quels nombres Maryam doit-elle alors attribuer à B et à C afin de satisfaire la propriété ($\mathscr{P}$) ?

Notons b et c les nombres associés respectivement à B et C.
B et C sont bleus donc $b = \frac{1}{2}(a+b)$ et $c = b$.
Nécessairement : $a = b = c$.
On vérifie aisément que, réciproquement, si $a = b = c$ cela convient.

Il faut attribuer le nombre a aux points B et C.

2. Pour les trois questions suivantes on suppose que $\mathscr{S} = \{A,B,C,D,E\}$. Les points A et E sont les seuls points jaunes, et Gustav leur attribué respectivement les réels a et e.

   (a) Les liaisons étant indiquées selon le schéma suivant, quels nombres Maryam doit-elle alors attribuer à chacun des points B, C et D afin de satisfaire la propriété $(\mathscr{P})$?



Comme précédemment, avec des notations semblables, nous devons avoir

$$\begin{cases} b = \frac{1}{2}(a+c) \\ c = \frac{1}{2}(b+d) \\ d = \frac{1}{2}(c+e) \end{cases}$$

Nous en déduisons

$$c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}(c+e)\right).$$

Et donc

$$c = \frac{1}{2}(a+e).$$

Nous en déduisons

$$\begin{cases} b = \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}e \\ d = \frac{1}{4}a + \frac{3}{4}e \end{cases}$$

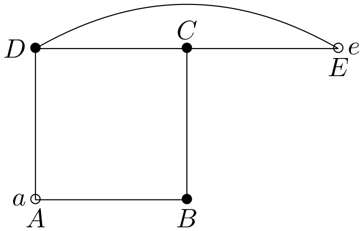
Réciproquement nous vérifions que ces valeurs conviennent.

$$\boxed{\begin{cases} b = \dfrac{3}{4}a + \dfrac{1}{4}e \\[2ex] c = \dfrac{1}{2}a + \dfrac{1}{2}e \\[2ex] d = \dfrac{1}{4}a + \dfrac{3}{4}e \end{cases}}$$

Remarquons que nous pouvons retrouver la somme des nombres associés aux nœuds grâce à la matrice d'adjacence du graphe

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{d(A)} & \frac{1}{d(B)} & \frac{1}{d(C)} & \frac{1}{d(D)} & \frac{1}{d(E)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d(A)}b \\ \frac{1}{d(B)}(a+c) \\ \frac{1}{d(C)}(b+d) \\ \frac{1}{d(D)}(c+e) \\ \frac{1}{d(E)}d \end{pmatrix}$$

(b) Même question pour le schéma suivant :



Exprimons b, c et d en fonction de a et e.

Comme précédemment, avec des notations semblables, nous devons avoir

$$\begin{cases} b = \frac{1}{2}(a+c) \\ c = \frac{1}{3}(b+d+e) \\ d = \frac{1}{3}(a+c+e) \end{cases}$$

Donc

$$c = \frac{1}{3}(b+d+e)$$

équivaut successivement à

$$c = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{3}(a+c+e) + e\right)$$
$$c = \frac{5}{18}(a+c) + \frac{4}{9}e$$
$$c = \frac{5}{13}a + \frac{8}{13}e$$

D'où

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2}a + \frac{5}{26}a + \frac{4}{13}e \\ &= \frac{18}{26}a + \frac{4}{13}e \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{3}a + \frac{5}{39}a + \frac{8}{39}e + \frac{1}{3}e \\ &= \frac{18}{39}a + \frac{21}{39}e \end{aligned}$$

On peut vérifier qu'effectivement ces valeurs conviennent :

$$\boxed{\begin{cases} b = \dfrac{9}{13}a + \dfrac{4}{13}e \\ c = \dfrac{5}{13}a + \dfrac{8}{13}e \\ d = \dfrac{6}{13}a + \dfrac{7}{13}e \end{cases}}$$

Nous pouvions également démontrer ce résultat en procédant à des combinaison linéaires sur les lignes du système.

$$\begin{cases} b = \dfrac{1}{2}(a+c) \\ c = \dfrac{1}{3}(b+d+e) \\ d = \dfrac{1}{3}(a+c+e) \end{cases}$$

équivaut successivement à

$$\begin{cases} 2b - c = a \\ -b + 3c - d = c \\ -c + 3d = a + e \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b - c = a \\ 5c - 2d = 2e + a \\ -c + 3d = a + e \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_1 + 2L_2$$

$$\begin{cases} 2b - c = a \\ 5c - 2d = 2e + a \\ 13d = 6a + 7e \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_2 + 5L_3$$

$$\begin{cases} 2b - c = a \\ 5c - 2d = 2e + a \\ d = \dfrac{6}{13}a + \dfrac{7}{13}e \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow \frac{1}{13}L_3$$

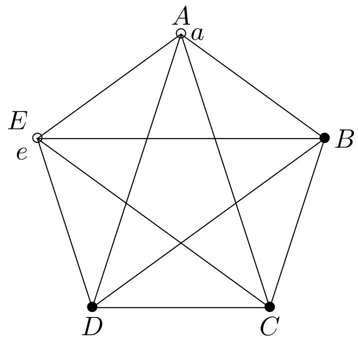
$$\begin{cases} 2b - c = a \\ 5c = \dfrac{25}{13}a + \dfrac{40}{13}e \\ d = \dfrac{6}{13}a + \dfrac{7}{13}e \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$$

$$\begin{cases} 2b - c = a \\ c = \dfrac{5}{13}a + \dfrac{8}{13}e \\ d = \dfrac{6}{13}a + \dfrac{7}{13}e \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2$$

$$\begin{cases} 2b = \dfrac{18}{13}a + \dfrac{8}{13}e \\ c = \dfrac{5}{13}a + \dfrac{8}{13}e \\ d = \dfrac{6}{13}a + \dfrac{7}{13}e \end{cases} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\begin{cases} b = \dfrac{9}{13}a + \dfrac{4}{13}e \\ c = \dfrac{5}{13}a + \dfrac{8}{13}e \\ d = \dfrac{6}{13}a + \dfrac{7}{13}e \end{cases} \qquad L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$$

(c) Même question pour le schéma suivant :



En raisonnant comme précédemment nous obtenons que b, c et d sont solutions du système

$$\begin{cases} 4b - c - d = a + e \\ -b + 4c - d = a + e \\ -b - c + 4d = a + e \end{cases}$$

$$\begin{cases} b - \frac{1}{4}c - \frac{1}{4}d = \frac{1}{4}(a+e) \\ -b + 4c - d = a + e \\ -b - c + 4d = a + e \end{cases} \qquad L_1 \leftarrow \frac{1}{4}L_1$$

$$\begin{cases} b - \frac{1}{4}c - \frac{1}{4}d = \frac{1}{4}(a+e) \\ \frac{15}{4}c - \frac{5}{4}d = \frac{5}{4}(a+e) \\ -\frac{5}{4}c + \frac{15}{4}d = \frac{5}{4}(a+e) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \end{array}$$

$$\begin{cases} b - \frac{1}{4}c - \frac{1}{4}d = \frac{1}{4}(a+e) \\ \frac{15}{4}c - \frac{5}{4}d = \frac{5}{4}(a+e) \\ 10d = 5(a+e) \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_2 + 3L_3$$

$$\begin{cases} b - \frac{1}{4}c - \frac{1}{4}d = \frac{1}{4}(a+e) \\ c - \frac{1}{3}d = \frac{1}{3}(a+e) \\ d = \frac{1}{2}(a+e) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow \frac{4}{15}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{10}L_3 \end{array}$$

$$\begin{cases} b - \frac{1}{4}c - \frac{1}{4}d = \frac{1}{4}(a+e) \\ c = \frac{1}{2}(a+e) \\ d = \frac{1}{2}(a+e) \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{3}L_3$$

$$\begin{cases} b = \frac{1}{2}(a+e) \\ c = \frac{1}{2}(a+e) \\ d = \frac{1}{2}(a+e) \end{cases} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{4}L_2 + \frac{1}{4}L_3$$

La propriété $\mathscr{P}$ est satisfaite si et seulement si

$$\begin{cases} b = \dfrac{1}{2}(a+e) \\ c = \dfrac{1}{2}(a+e) \\ d = \dfrac{1}{2}(a+e) \end{cases}$$

3. Dans cette question uniquement on généralise le schéma de la question 2-(c) avec un nombre quelconque de points.

   On suppose que $n \geqslant 1$ est un entier, que $\mathscr{S} = \{P_0,P_1,P_2,\dots,P_n,P_{n+1}\}$ et que tout point de $\mathscr{S}$ est voisin de chaque autre point de $\mathscr{S}$. De plus, P_0 et P_{n+1} sont les seuls points jaunes, et Gustav leur a attribué respectivement les réels a et b. Quels nombres Maryam doit-elle alors attribuer à chacun des points P_i pour $i = 1,\dots,n$ afin de satisfaire la propriété ($\mathscr{P}$) ?

   Observons que les points P_1 jusqu'à P_n ont des rôles semblables et sont permutables. Par conséquent c'est le même nombre p qui leur est tous associé.

   Déterminons, par exemple, le nombre p associé à P_1.

   Puisqu'il s'agit d'un graphe simple complet (chaque point est relié à tous les autres), P_1 est relié aux P_2, ..., P_n et aussi à P_0 et P_{n+1} donc

$$p = \frac{(n-1)p + a + e}{n+1}.$$

   Nous en déduisons finalement que le nombre p associé aux points bleus est

$$p = \tfrac{1}{2}.$$

   Ce résultat doit pouvoir se montrer par récurrence (en ajoutant un point au graphe) ou en résolvant un système linéaire (travail sur les matrices).

Partie B : étude du cas général.

On note respectivement $\mathscr{J}$ l'ensemble des points jaunes, et, $\mathscr{B}$ l'ensemble des points bleus. Ainsi

$$\mathscr{S} = \mathscr{J} \cup \mathscr{B}.$$

Quand Gustav attribue un réel à chaque point jaune, cela consiste à définir une fonction k de $\mathscr{J}$ dans $\mathbb{R}$.

L'objectif de Maryam est donc de construire une fonction $f : \mathscr{S} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} f(M) = k(M) \text{ si } M \text{ est jaune (1)} \\ f(M) = \frac{f(P_1)+\cdots+f(P_d)}{d} \text{ si } M \text{ est bleu (2)} \\ \text{où } d = d(M) \text{ est le degré de } M \text{ (qui dépend de } M\text{) et} \\ P_1, \ldots, P_d \text{ les voisins de } M. \end{cases}$$

On dira que f est une solution ***pour l'attribution*** k.

Dans cette partie on suppose donc donnée une telle distribution k.

On note K le plus grand des nombres $k(M)$ lorsque M décrit l'ensemble $\mathscr{J}$.

Existence d'une solution.

1. On suppose dans cette question que $k(M) \geqslant 0$ pour tout point $M \in \mathscr{J}$. On construit alors, par récurrence, la suite (f_n) de fonctions suivante :

   On pose $f_0(M) = k(M)$ si M est jaune, et $f_0(M) = 0$ si M est bleu.
   Puis, pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose

$$\begin{cases} f_{n+1}(M) = k(M) \text{ si } M \text{ est jaune} \\ f_{n+1}(M) = \frac{f_n(P_1)+\cdots+f_n(P_d)}{d} \text{ si } M \text{ est bleu} \\ \text{où } d = d(M) \text{ est le degré de } M \text{ (qui dépend de } M\text{) et} \\ P_1, \ldots, P_d \text{ les voisins de } M. \end{cases}$$

   (a) Prouver que, pour tout $n \geqslant 0$ et tout point $M \in \mathscr{S}$, on a $0 \leqslant f_n(M) \leqslant f_{n+1}(M) \leqslant K$.

   Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $P(n)$: « $\forall M \in \mathscr{S}$, $0 \leqslant f_n(M) \leqslant f_{n+1}(M) \leqslant K$ » est vraie.

   * Démontrons que $P(0)$ est vraie.

   - Si M est jaune, alors $f_0(M) = f_1(M) = k(M)$. Or, par hypothèse, $0 \leqslant k(M) \leqslant K$, donc nous obtenons bien : $0 \leqslant f_0(M) \leqslant f_1(M) \leqslant K$.
   - Si M est bleu, alors $f_1(M) = \frac{f_0(P_1)+\cdots+f_0(P_d)}{d}$.
     Si M est bleu alors $f_0(M) = 0$, donc

$$f_1(M) = \frac{1}{d} \sum_{\{i|P_i \in \mathscr{J}\}} f_0(P_i)$$

Si $M \in \mathscr{J}$, alors $f_0(M) = k(M)$, donc

$$f_1(M) = \frac{1}{d} \sum_{\{i|P_i \in \mathscr{J}\}} k(P_i)$$

Par hypothèse, quelque soit le point M jaune : $0 \leqslant k(M) \leqslant K$, d'où

$$f_1(M) \leqslant \frac{1}{d} dK.$$

Finalement

$$0 = f_0(M) \leqslant f_1(M) \leqslant K.$$

Autrement dit $P(0)$ est vraie.

* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Démontrons que $P(n+1)$ est vraie.
Soit $M \in \mathscr{S}$.

- Par hypothèse de récurrence : $0 \leqslant f_{n+1}(M)$.
- Démontrons que : $f_{n+2}(M) \leqslant K$.
  Par construction de la suite des f_n

$$f_{n+2}(M) = \frac{f_{n+1}(P_1) + \cdots + f_{n+1}(P_d)}{d}$$

Or, par hypothèse de récurrence, quelque soit $i \in [\![1,d]\!]$,

$$f_{n+1}(P_i) \leq K,$$

donc

$$\begin{aligned} f_{n+2}(M) &\leqslant \frac{K + \cdots + K}{d} \\ &\leqslant K \end{aligned}$$

- Il nous reste à établir que : $f_{n+1}(M) \leqslant f_{n+2}(M)$.
  Soit $i \in [\![1,n]\!]$.
  Par hypothèse de récurrence :

$$f_n(P_i) \leqslant f_{n+1}(P_i)$$

  Ceci étant vrai pour tout i :

$$\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} f_n(P_i) \leqslant \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} f_{n+1}(P_i)$$

  Autrement dit

$$f_{n+1}(M) \leqslant f_{n+2}(M)$$

Nous avons donc démontré que $P(n+1)$ est vraie.

Nous avons démontré par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$ et tout point $M \in \mathscr{S}$, on a $0 \leqslant f_n(M) \leqslant f_{n+1}(M) \leqslant K$.

(b) En déduire l'existence d'une solution pour l'attribution de k.

Démonstration d'existence.

Soit $M \in \mathscr{S}$.
D'après la question précédente, $(f_n(M))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc convergente.
Notons, pour tout $M \in \mathscr{S}$, $f_n(M) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(M)$.

Vérifions que f est une solution pour l'attribution k.

(1) Soit $M \in \mathscr{J}$. Par construction $f_n(M) = k(M)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc, cette suite étant constante, en passant à la limite, $f(M) = k(M)$.

(2) Soit $M \in \mathscr{J}$ un point bleu. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(M) = \frac{f_n(P_1)+\cdots+f(P_d)}{d}$, et que toutes les suites intervenant sont convergentes, en passant à la limite,

$$f(M) = \frac{f(P_1)+\cdots+f(P_d)}{d}.$$

f est donc bien une solution pour l'attribution k.

Il existe une solution pour l'attribution k.

2. Prouver que si f est une solution pour l'attribution k et si α est une constante, alors la fonction $f + \alpha$ est aussi une solution pour l'attribution $k + \alpha$.

   Il s'agit de démontrer une implication.

   Supposons f soit une solution pour l'attribution k ; soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Démontrons que $f + \alpha$ est une solution pour l'attribution $k + \alpha$.

   (1) Soit $M \in \mathscr{J}$. Puisque $f(M) = k(M)$, évidemment, $(f + \alpha)(M) = (k + \alpha)(M)$.
   (2) Soit $M \in \mathscr{S}$ un point bleu.

$$f(M) = \frac{f(P_1) + \cdots + f(M)}{d}$$

   équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
f(M) + \alpha &= \frac{f(P_1) + \cdots + f(M)}{d} + \alpha \\
(f + \alpha)(M) &= \frac{f(P_1) + \cdots + f(M)}{d} + \frac{d\alpha}{d} \\
(f + \alpha)(M) &= \frac{[f(P_1) + \alpha] + \cdots + [f(M) + \alpha]}{d} \\
(f + \alpha)(M) &= \frac{(f + \alpha)(P_1) + \cdots + (f + \alpha)(P_d)}{d}
\end{aligned}$$

   Ainsi $f + \alpha$ est bien une solution de l'attribution $k + \alpha$.

   Quelque soit $\alpha \in \mathbb{R}$, si f est une solution de l'attribution k, alors $f + \alpha$ est une solution de l'attribution $k + \alpha$.

3. En déduire qu'il existe une solution à notre problème en général, c'est-à-dire sans l'hypothèse de la question 1 : $k(M) \geqslant 0$ pour tout point $M \in \mathscr{J}$.

   Puisqu'il y a un nombre fini de points (notamment) jaunes, $\{k(M) | M \in \mathscr{J}\}$ admet un minimum m. Alors $k + |m|$ est une attribution dont toutes les images sont positives : $\forall M \in \mathscr{J}$, $(k + |m|)(M) \geqslant 0$.

Par conséquent, d'après la question 1.(b) il existe une solution, f, pour l'attribution $k+|m|$.

Donc, d'après la question 2, $f-|m|$ est une solution pour l'attribution k.

Ainsi

étant donné k une attribution quelconque, il existe une solution pour cette attribution.

Unicité de la solution.

On suppose dans cette sous-partie que l'on dispose d'une solution f pour cette attribution k.

4. Prouver que, pour tout point $M \in \mathscr{S}$, on a $f(M) \leqslant K$.

5. Supposons que g soit également une solution pour l'attribution de k.

   (a) Justifier que la fonction $f-g$ vérifie la condition (2).

   Soit $M \in \mathscr{S}$ un point bleu.

$$(f-g)(M) = f(M) - g(M)$$

   Puisque f et g sont des solutions pour l'attribution k :

$$\begin{aligned}(f-g)(M) &= \frac{f(P_1)+\cdots+f(P_d)}{d} - \frac{g(P_1)+\cdots+g(P_d)}{d} \\ &= \frac{f(P_1)-g(P_1)+\cdots+f(P_d)-g(P_d)}{d} \\ &= \frac{(f-g)(P_1)+\cdots+(f-g)(P_d)}{d}\end{aligned}$$

   $f-g$ vérifie la condition (2).

   (b) Que vaut $f-g$ sur $\mathscr{J}$?

   Sur $\mathscr{J}$

$$f = g = k$$

donc

$$\boxed{f - g = 0.}$$

(c) En déduire que $f = g$.

(1) $(f-g)(M) = 0$ pour tout $M \in \mathscr{J}$ d'après la question B.5.(b),

(2) $f - g$ vérifie la condition (2) d'après la question B.5.(a).

Ainsi $f-g$ est une solution de l'attribution nulle (à tous les points jaunes sont associés 0). Or le maximum de l'attribution nulle est $K_0 = 0$, donc, d'après la question B.4 : $f - g(M) \leqslant K_0 = 0$ pour tout $M \in \mathscr{S}$.
De même $g - f \leqslant 0$ donc

$$\boxed{\text{pour tout } M \in \mathscr{S},\ f = g.}$$

6. Que peut-on dire de f s'il n'y a qu'un seul point jaune ?

S'il n'y a qu'un point jaune M_0 et que $k(M_0) = K$, alors nous vérifierions aisément que la fonction f, constante égale à K sur $\mathscr{S}$, est une solution pour l'attribution k.
Or d'après les questions précédentes une telle solution est unique, donc

$$\boxed{\text{s'il n'y a qu'un seul point jaune alors tous les points sont affectés du même nombre.}}$$

III Problème : les nombres en or.

On note φ la plus grande racine réelle de l'équation $x^2 = x + 1$. Le nombre φ connu depuis l'antiquité, est appelé nombre d'or. Un réel x est dit un ***nombre en or*** s'il existe :

— deux entiers naturels p et q

— des entiers a_p, a_{p-1}, …, a_0, …, a_{-q} ne prenant que les valeurs 0 ou 1 tels que

$$x = a_p\varphi^p + a_{p-1}\varphi^{p-1} + \cdots + a_1\varphi + a_0 + a_{-1}\varphi^{-1} + \cdots + a_{-q}\varphi^{-q}.$$

Dans ce cas, on notera $x \rhd a_pa_{p-1}\ldots a_0{,}a_{-1}\ldots a_{-q}$.

Par exemple si $x = \varphi^3 + \varphi^2 + 1 + \dfrac{1}{\varphi} + \dfrac{1}{\varphi^4}$, on notera $x \rhd 1101{,}1001$. On dira alors que 1101,1001 est une ***représentation en or*** de x.

Il est clair que l'on peut ajouter, au début, ou à la fin de la représentation autant de 0 que l'on souhaite.

Une séquence de la représentation est une suite de 0 et de 1 qui apparaît dans la représentation. Dans l'exemple précédent, 10110 est une séquence de la représentation 1**101**,**10**1.

Partie A : tous les entiers naturels sont en or.

1. Montrer que, dans la représentation en or de x, on peut remplacer toute séquence 011 par 100 et réciproquement afin d'obtenir une autre représentation en or de x.

   Par exemple le réel dont la représentation en or est 1101,1001 admet également 1110,0001 et 1101,0111 comme représentation en or.

   On dira que les deux séquences 011 et 100 sont équivalentes.

   Dire que 011 est une séquence dans la représentation en or de x signifie : $\exists p \in \mathbb{Z}$, 011 $\triangleright 0\varphi^{p+2} + 1\varphi^{p+1} + 1\varphi^{p}$.

$$\begin{aligned} 0\varphi^{p+2} + 1\varphi^{p+1} + 1\varphi^{p} &= \varphi^{p+1} + \varphi^{p} \\ &= \varphi^{p}(\varphi + 1) \end{aligned}$$

   Puisque $\varphi^2 = \varphi + 1$

$$\begin{aligned} 0\varphi^{p+2} + 1\varphi^{p+1} + 1\varphi^{p} &= \varphi^{p}\varphi^{2} \\ &= \varphi^{p+2} \\ &= \varphi^{p+2} + 0\varphi^{p+1} + 0\varphi^{p} \end{aligned}$$

   $$\boxed{\text{Les séquences 011 et 100 sont équivalentes.}}$$

2. Plus généralement, donner une séquence dans laquelle il n'y a jamais deux 1 consécutifs et qui soit équivalente à $011\ldots1$ où il y a n occurrences du chiffre 1.

$$0111111111111\ldots$$

équivaut successivement à

$$\begin{array}{l}
0111111111111\ldots \\
1001111111111\ldots \\
1001111111111\ldots \\
1010011111111\ldots \\
1010011111111\ldots \\
1010100111111\ldots \\
1010100111111\ldots \\
1010101001111\ldots
\end{array}$$

Considérons deux cas en distinguant suivant la parité de n.

Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 2$.

(a) Supposons que n est pair : $n = 2q$ avec $q \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \varphi^k &= \sum j = 1^q \varphi^{2j} + \varphi^{2j-1} \\
&= \sum_{j=1}^{q} \varphi^{2j+1}
\end{aligned}$$

Autrement dit dans ce cas $0111\ldots111$ équivaut à $101010\ldots10100$.

(b) Supposons que n est impair : $n = m + 1$ avec $m \in \mathbb{N}$ qui est pair. Donc, d'après le cas précédent $0111\ldots1111$ équivaut à $101010\ldots101001$.

> Si n est pair $0111\ldots111$ équivaut à $101010\ldots10100$, sinon $0111\ldots1111$ équivaut à $101010\ldots101001$ qui sont bien des écritures sans qu'il y ait jamais deux 1 consécutifs.

3. Montrer que les entiers 2 et 3 sont des nombres en or et en donner une représentation en or.

$\varphi^2 = \varphi + 1$ donc, comme $\varphi \neq 0$, $1 = \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2}$.
D'où : $2 = 1 + \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2}$.
Finalement

$$2 \rhd 1{,}11.$$

$$\begin{aligned} 2 &\rhd 1{,}11 \\ &\rhd 01{,}11 \\ &\rhd 10{,}01 \end{aligned}$$

Donc

$$3 \rhd 11{,}01.$$

4. Montrer que tous les entiers naturels admettent une représentation en or.

Partie B : représentation en or pur.

On dira qu'une représentation $x \rhd a_p a_{p-1} \dots a_0{,}a_{-1} \dots a_{-q}$ d'un nombre en or est en ***or pur*** si pour tout i,

$$a_i a_{i+1} = 0.$$

En d'autres termes une représentation est en or pur si elle ne contient jamais deux 1 consécutifs.

Soit x un réel non nul, si $x \rhd a_p a_{p-1} \dots a_0{,}a_{-1} \dots a_{-q}$, on définit la ***teneur en or*** de la représentation comme étant égale à l'exposant de la plus grande puissance de φ dont le coefficient vaut 1, dans l'égalité $x = a_p\varphi^p + \dots + a_{-q}\varphi^{-q}$.

Par exemple la teneur de la représentation 1101,1001 est égale à 3 et celle de 0,0010 est égale à -3.

1. Donner une représentation en or pur des entiers 2, 3, 4 et 5.

2. Soit x un réel ayant une représentation en or pur de teneur en or égale à n.

   (a) Montrer que
   $$\varphi^n \leqslant x < \varphi^{n+1}.$$

   (b) Montrer que la représentation en or pur d'un réel, si elle existe, est unique.

3. Soit x un réel non nul ayant une représentation en or pur.

(a) Exprimer la teneur en or de la représentation en or pur de x à l'aide des fonctions logarithme népérien et partie entière.

(b) Écrire un algorithme permettant de déterminer cette représentation.

(c) Appliquer votre algorithme pour $x = 2018$.

4. Montrer qu'un réel en or possède forcément une représentation en or pur.

5. Montrer qu'il existe des réels strictement positifs qui ne sont pas en or.