Concours général de mathématique s 2017.

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
Classes de terminale S
DURÉE : 5 HEURES
La calculatrice est autorisée conformément à la réglementation.
La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.
Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer clairement dans la copie.

I Problème : parties de $\mathbb{C}$ de type S.

Une partie $\mathscr{A}$ non vide de $\mathbb{C}$ (ensemble des nombres complexes) est dite de type S, si pour tout $z_1 \in \mathscr{A}$ et $z_2 \in \mathscr{A}$ le produit $z_1 z_2$ et la somme $z_1^2 + z_2^2$ sont encore dans $\mathscr{A}$.

Dans tout le problème $\mathscr{A}$ désigne une partie de $\mathbb{C}$ de type S.

On note $b(\mathscr{A})$ le nombre de nombres complexes z de $\mathscr{A}$ dont le module $|z|$ est inférieur ou égale à 1.

On note $b(\mathscr{A}) = \infty$ si ce nombre est infini.

Partie A : Quelques exemples simples.

1. Les ensembles suivants sont des parties de $\mathscr{C}$ de type S (on ne demande pas de le vérifier), préciser pour chacun d'eux la valeur de $b(\mathscr{A})$:

   (a) $\mathscr{A} = \{0\}$.

   (b) $\mathscr{A} = \mathbb{C}$.

   (c) $\mathscr{A} = \mathbb{N}$.

   (d) $\mathscr{A} = \mathbb{N}^*$.

2. (a) Donner une partie $\mathscr{A}$ de type S telle que $b(\mathscr{A}) = 0$.

   (b) Donner une partie $\mathscr{A}$ de type S telle que $b(\mathscr{A}) = 3$.

3. On note $\overline{\mathscr{A}} = \{\overline{z}, z \in \mathscr{A}\}$, c'est-à-dire la partie de $\mathbb{C}$ constituée de tous les nombres complexes conjugués des éléments de $\mathscr{A}$. Montrer que $\overline{\mathscr{A}}$ est de type S et préciser $b\left(\overline{\mathscr{A}}\right)$.

Partie B : deux exemples de parties de $\mathbb{C}$ de type S.

1. On définit le complexe j par $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ et on note $\mathbb{Z}[j] = \{a+bj,\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$, c'est-à-dire la partie de $\mathbb{C}$ constituée de tous les nombres complexes de la forme $a+bj$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$.

   (a) Calculer $1 + j + j^2$.

   (b) Justifier que $\mathbb{Z}[j]$ est de type S.

   (c) Montrer que $b\left(\mathbb{Z}[j]\right) = 7$.

   (d) On note $\mathbb{Z}[j]^* = \mathbb{Z}[j] \setminus \{0\}$ (les éléments non nuls de $\mathbb{Z}[j]$). Justifier que $\mathbb{Z}[j]^*$ est de type S et déterminer $b\left(\mathbb{Z}[j]^*\right)$.

2. On définie la partie $\mathscr{R}$ de $\mathbb{C}$ par

$$\mathscr{R} = \left\{z \in \mathbb{C},\ z^2 \in \mathbb{Z}[j]\right\}.$$

   Ainsi un nombre complexe z est dans $\mathbb{R}$ si et seulement si son carré est dans $\mathbb{Z}[j]$.

   (a) Montrer que $\mathscr{R}$ est du type S.

   (b) Déterminer $b\left(\mathscr{R}\right)$.

Partie C : à la recherche des valeurs possibles de $b\left(\mathscr{A}\right)$.

1. On suppose qu'il existe $a \in \mathscr{A}$ tel que $0 < |a| < 1$. Montrer que $b\left(\mathscr{A}\right) = \infty$.

2. On considère, dans cette question, un nombre complexe a de module 1. On note $\mathrm{Arg}(a)$ l'unique argument de a inclus dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$. On suppose de plus que $\mathrm{Arg}(a)$ n'est ni un multiple de $\dfrac{\pi}{6}$, ni un multiple de $\dfrac{\pi}{4}$.

   (a) Montrer que si $\mathrm{Arg}(a) \in \left]\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3}\right[$, alors l'un des deux nombres complexes $a^2 + a^4$ ou $a^4 + a^8$ possède un module non nul et strictement inférieur à 1.

   (b) De même démontrer que si $\mathrm{Arg}(a) \in \left]0;\dfrac{\pi}{6}\right[$, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < \left|a^{2n} + a^{4n}\right| < 1$.

(c) Montrer que si $\mathrm{Arg}(a) \in \left]-\dfrac{2\pi}{3};0\right[$, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < \left|a^{2n} + a^{4n}\right| < 1$.

(d) Conclure qu'il existe toujours $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < \left|a^{2n} + b^{4n}\right| < 1$.

3. On suppose, dans cette question, que $b\left(\mathscr{A}\right)$ est fini et supérieur ou égale à 2.

   (a) Montrer qu'il existe $a \in \mathscr{A}$ tel que $|a| = 1$.

   (b) Quelles sont alors les valeurs possibles pour $\mathrm{Arg}(a)$?

   (c) En déduire que $b\left(\mathscr{A}\right) \leq 17$.

4. Donner une partie $\mathscr{A}$ de type S telle que $b\left(\mathscr{A}\right) = 5$.

5. Donner une partie $\mathscr{A}$ de type S telle que $b\left(\mathscr{A}\right) = 9$.

6. Quelles sont les valeurs possibles de $b\left(\mathscr{A}\right)$?

II Problème : c'est probablement bon.

Partie A : Franck passe un premier examen.

Franck doit réussir un examen qui consiste en un Q.C.M. (questionnaire à choix multiples) de dix questions numérotées de 1 à 10. Il doit répondre à ces questions dans l'ordre et s'il ne répond pas à une question, *on ne prendra pas en compte les réponses qu'il pourrait apporter aux questions suivantes.*

Chaque bonne réponse rapporte un point, chaque mauvaise réponse fait perdre un point et ne pas répondre à une question ne rapporte aucun point.

Franck réussira son premier examen si sa note finale est d'au moins *sept* points.

Franck connaît les bonnes réponses des *six* premières questions. Par contre, pour chacune des quatre questions suivantes, il a une probabilité p de trouver la bonne réponse, avec $0 < p < 1$.

1. Prouver que si Franck ne répond pas à la question numérotée 9, il a intérêt à ne pas répondre à la question numérotée 8 pour réussir son examen.

2. Franck a-t-il intérêt à répondre à la question numérotée 10 ?

3. Déterminer selon la valeur de p quelle est la meilleure stratégie pour Franck.

Partie B : Franck passe un second examen.

Franck passe maintenant un second examen consistant encore en un Q.C.M., formé cette fois de 50 questions. Les modalités de cet examen sont les mêmes que celles du précédent. Ainsi Franck doit répondre à ces questions dans l'ordre et s'il ne répond pas à une question, *on ne prendra pas en compte les réponses qu'il pourrait apporter aux questions suivantes*. Chaque bonne réponse rapporte un point, chaque mauvaise réponse fait perdre un point et ne pas répondre à une question ne rapporte aucun point.